Обеспечение образовательного процесса с целью достижения учащимися планируемых образовательных результатов по математике

ПРОСВЕЩЕНИЕ

Цель современного образования

- В последнее время общество меняется так динамично, что не представляется возможным точно спрогнозировать, какие именно знания пригодятся ребенку в его взрослой жизни.
- Поэтому в обучении школьников на первый план выходит вопрос формирования у них умений самостоятельно продолжать образование на протяжении всей жизни, т.е. обладать **метапредметными компетентностями**.
- В свете международных критериев измерения качества системы образования на одно из первых мест выходит проблема формирования креативности, способности применять свои знания на практике, умения мыслить нестандартно, умения работать с информацией, принимать решения в нестандартных ситуациях.
- Поэтому главной целью современного образования является развитие и воспитание интеллектуальной, свободной, мобильной, нравственной и творческой личности.

Серия «Внеурочная деятельность»

Серия «Внеурочная деятельность» — это готовое решение для организации внеурочной деятельности в общеобразовательных организациях в соответствии с требованиями Федеральных государственных образовательных стандартов общего образования.

Материал пособий способствует формированию креативного мышления, предусматривает активность и самостоятельность обучающихся, сочетание форм индивидуальной и групповой работы, развитие навыков проектной и исследовательской деятельности, основан на практико-ориентированном подходе.

Пособия данной серии – это отличный инструмент реализации программы совершенствования и развития УУД для каждой школы.

Пособия имеют модульную структуру и рассчитаны на 17/34/68 часов.

Практико-ориентированным заданиям отводится 60% содержания пособий, теоретическому материалу — 40%.

Использование пособий позволят педагогу реализовать программы внеурочной деятельности без привлечения дополнительных материалов.

Серия пособий «Внеурочная деятельность»

Спивак А.В.
Тысяча и одна задача по математике.
5-7 классы

Проектная мастерская.
5-9 классы.
Леонтович А.В.,
Смирнов И.А.,
Саввичев А.С.

Прасолов В.В.
Решение задач повышенной сложности по геометрии.
7-9 классы

Наместникова М.С.
Информационная безопасность, или на расстоянии одного вируса.
7-9 классы

Ходот Т.Г. и др.
Пропедевтика изучения геометрии в основной школе.
5 – 6 классы

Прасолов В.В.
Задачи повышенной сложности по геометрии.

Прасолов В.В. «Решение задач повышенной сложности по геометрии» для учащихся 7-9 классов

В серии «Внеурочная деятельность» по математике вышла книга «Решение задач повышенной сложности по геометрии» для учащихся 7-9 классов. Автор её Прасолов В.В.

Каждая глава начинается с перечисления основных фактов и понятий, относящихся к этому разделу. Они могут понадобиться для решения задач. Далее в пособии представлены примеры решения наиболее типичных задач повышенной сложности и задачи для самостоятельного решения, к которым даны ответы и указания.

Книга может быть полезной как для учителей, так, и, для учащихся, которые хотят повысить свой уровень или подготовиться к математической олимпиаде

Серия пособий «Трудные задания ЕГЭ»

В 2019 году основана новая серия пособий **«Трудные задания ЕГЭ».** В этой серии готовятся к выпуску две книги по математике.

- «Математика. Трудные задания ЕГЭ.

  Задачи с экономическим содержанием».

- «Математика. Трудные задания ЕГЭ.

  Задачи с параметром».

Автор этих пособий Шевкин А.В.

Книги предназначены для подготовки к ЕГЭ по математике профильного уровня.

Серия пособий «Трудные задания ЕГЭ»

Шевкин А.В. Трудные задания ЕГЭ. Математика.
Задачи с параметром. 10 — 11 классы

Книга включает разбор заданий №17 ЕГЭ (задачи с экономическим содержанием), образцы решения и задания для самостоятельного решения. Начинается пособие с разбора простых задач, охватывающего различные идеи решений, затем рассматриваются более сложные задачи.

Шевкин А.В. Трудные задания ЕГЭ. Математика.
Задачи с экономическим содержанием. 10 — 11 классы

Книга включает разбор заданий №18 ЕГЭ (задачи с параметром), образцы решения и задания для самостоятельного решения. Начинается пособие с разбора простых задач, охватывающего различные идеи решений, затем рассматриваются более сложные задачи.

Универсальный многоуровневый сборник задач. Алгебра и начала математического анализа

Оглавление

Предисловие ... 3

Глава 1. Числа и числовые выражения ... 5
1.1. Целые числа и степени с натуральным показателем ... —
1.2. Дроби и степени с целым показателем ... 7
1.3. Корни и степени с дробным показателем ... 10
1.4. Тригонометрические выражения ... 13
1.5. Показательные выражения и степени с действительным показателем ... 16
1.6. Логарифмы и логарифмические выражения ... 19

Глава 2. Алгебраические выражения ... 22
2.1. Целые алгебраические выражения ... —
2.2. Дробно-рациональные алгебраические выражения ... 25
2.3. Иррациональные алгебраические выражения ... 28
2.4. Тригонометрические выражения ... 32
2.5. Показательные выражения ... 35
2.6. Логарифмические выражения ... 38

Глава 3. Уравнения ... 42
3.1. Целые уравнения ... —
3.2. Дробно-рациональные уравнения ... 44
3.3. Иррациональные уравнения ... 47
3.4. Тригонометрические уравнения ... 50
3.5. Показательные уравнения ... 53
3.6. Логарифмические уравнения ... 56

Глава 4. Системы уравнений ... 59
4.1. Системы целых уравнений ... —
4.2. Системы, содержащие дробно-рациональные уравнения ... 62
4.3. Системы, содержащие иррациональные уравнения ... 65
4.4. Системы, содержащие тригонометрические уравнения ... 69
4.5. Системы, содержащие показательные уравнения ... 72
4.6. Системы, содержащие логарифмические уравнения ... 75

Глава 5. Неравенства и системы неравенств ... 79
5.1. Целые неравенства и системы целых неравенств ... —
5.2. Дробно-рациональные неравенства и системы, содержащие дробно-рациональные неравенства ... 82
5.3. Иррациональные неравенства и системы, содержащие иррациональные неравенства ... 86
5.4. Тригонометрические неравенства и системы, содержащие тригонометрические неравенства ... 88
5.5. Показательные неравенства и системы, содержащие показательные неравенства ... 91
5.6. Логарифмические неравенства и системы, содержащие логарифмические неравенства ... 93

Глава 6. Задачи с текстовым условием ... 97
6.1. Арифметические задачи с практическим содержанием ... —
6.2. Задачи на оптимальный выбор ... 101
6.3. Задачи на движение ... 110
6.4. Задачи на производительность и работу ... 119
6.5. Задачи на проценты, части, доли ... 126
6.6. Задачи на свойства целых чисел ... 133

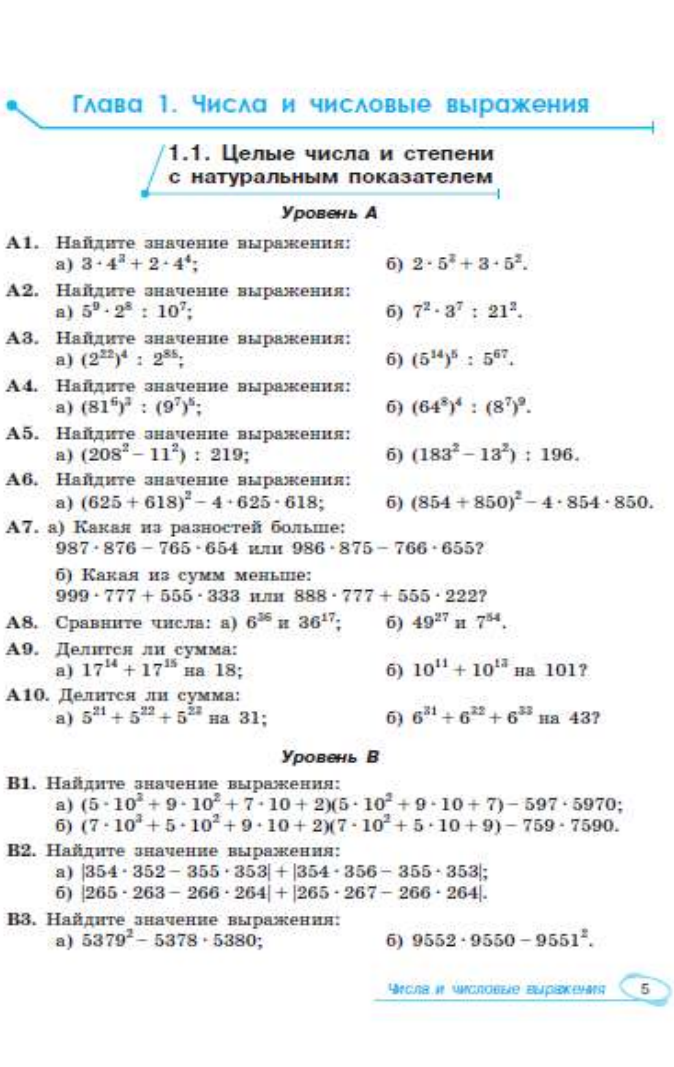
Глава 7. Представление данных, статистика, вероятность ... 146
7.1. Представление данных ... —
7.2. Описательная статистика ... 150
7.3. Случайные опыты с равновозможными элементарными событиями ... 156
7.4. Операции над событиями. Дерево вероятностей. Независимость событий ... 158
7.5. Условная вероятность. Формула полной вероятности ... 162
7.6. Независимые испытания ... 166

Глава 8. Функции и графики ... 170
8.1. Чтение графиков реальных зависимостей ... —
8.2. Целые рациональные функции ... 179
8.3. Дробно-рациональные функции ... 181
8.4. Иррациональные функции ... 183
8.5. Тригонометрические функции ... 184
8.6. Показательная функция ... 187
8.7. Логарифмическая функция ... 188

Глава 9. Начала математического анализа. Исследование функций ... 191
9.1. Графические интерпретации ... —
9.2. Целые рациональные функции ... 195
9.3. Дробно-рациональные функции ... 199
9.4. Иррациональные функции ... 204
9.5. Тригонометрические функции ... 209
9.6. Показательная функция ... 214
9.7. Логарифмическая функция ... 218

Глава 10. Уравнения и неравенства с параметром и нестандартные уравнения и неравенства ... 223
10.1. Логический перебор в задачах с параметром ... —
10.2. Квадратный трёхчлен в задачах с параметром и нестандартных задачах ... 225
10.3. Применение свойств функций к решению уравнений и неравенств ... 228
10.4. Графические интерпретации ... 230
10.5. Геометрические идеи ... 232
10.6. Другие методы ... 235

Универсальный многоуровневый сборник задач. Алгебра и начала математического анализа



Глава 1. Числа и числовые выражения

1.1. Целые числа и степени с натуральным показателем

Уровень А

А1. Найдите значение выражения:
а) $3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^4$; б) $2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2$.

А2. Найдите значение выражения:
а) $5^9 \cdot 2^8 : 10^7$; б) $7^2 \cdot 3^7 : 21^2$.

А3. Найдите значение выражения:
а) $(2^{22})^4 : 2^{85}$; б) $(5^{14})^5 : 5^{67}$.

А4. Найдите значение выражения:
а) $(81^6)^2 : (9^7)^6$; б) $(64^8)^4 : (8^7)^9$.

А5. Найдите значение выражения:
а) $(208^2 - 11^2) : 219$; б) $(183^2 - 13^2) : 196$.

А6. Найдите значение выражения:
а) $(625 + 618)^2 - 4 \cdot 625 \cdot 618$; б) $(854 + 850)^2 - 4 \cdot 854 \cdot 850$.

А7. а) Какая из разностей больше:
$987 \cdot 876 - 765 \cdot 654$ или $986 \cdot 875 - 766 \cdot 655$?
б) Какая из сумм меньше:
$999 \cdot 777 + 555 \cdot 333$ или $888 \cdot 777 + 555 \cdot 222$?

А8. Сравните числа: а) 6^{36} и 36^{17}; б) 49^{27} и 7^{54}.

А9. Делится ли сумма:
а) $17^{14} + 17^{15}$ на 18; б) $10^{11} + 10^{13}$ на 101?

А10. Делится ли сумма:
а) $5^{21} + 5^{22} + 5^{23}$ на 31; б) $6^{31} + 6^{32} + 6^{33}$ на 43?

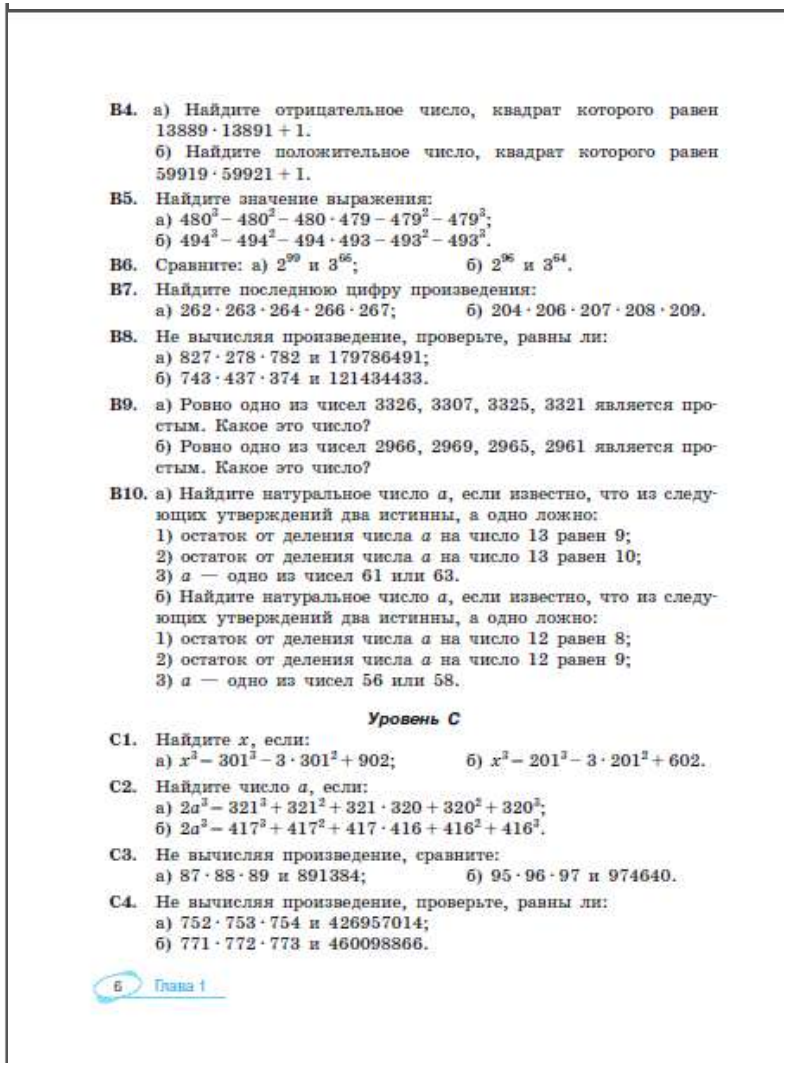
Уровень В

В1. Найдите значение выражения:
а) $(5 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2)(5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 7) - 597 \cdot 5970$;
б) $(7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 2)(7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 9) - 759 \cdot 7590$.

В2. Найдите значение выражения:
а) $|354 \cdot 352 - 355 \cdot 353| + |354 \cdot 356 - 355 \cdot 353|$;
б) $|265 \cdot 263 - 266 \cdot 264| + |265 \cdot 267 - 266 \cdot 264|$.

В3. Найдите значение выражения:
а) $5379^2 - 5378 \cdot 5380$; б) $9552 \cdot 9550 - 9551^2$.

Числа и числовые выражения 5



В4. а) Найдите отрицательное число, квадрат которого равен $13889 \cdot 13891 + 1$.
б) Найдите положительное число, квадрат которого равен $59919 \cdot 59921 + 1$.

В5. Найдите значение выражения:
а) $480^3 - 480^2 - 480 \cdot 479 - 479^2 - 479^3$;
б) $494^3 - 494^2 - 494 \cdot 493 - 493^2 - 493^3$.

В6. Сравните: а) 2^{99} и 3^{66}; б) 2^{96} и 3^{64}.

В7. Найдите последнюю цифру произведения:
а) $262 \cdot 263 \cdot 264 \cdot 266 \cdot 267$; б) $204 \cdot 206 \cdot 207 \cdot 208 \cdot 209$.

В8. Не вычисляя произведение, проверьте, равны ли:
а) $827 \cdot 278 \cdot 782$ и 179786491;
б) $743 \cdot 437 \cdot 374$ и 121434433.

В9. а) Ровно одно из чисел 3326, 3307, 3325, 3321 является простым. Какое это число?
б) Ровно одно из чисел 2966, 2969, 2965, 2961 является простым. Какое это число?

В10. а) Найдите натуральное число a, если известно, что из следующих утверждений два истинны, а одно ложно:
1) остаток от деления числа a на число 13 равен 9;
2) остаток от деления числа a на число 13 равен 10;
3) a — одно из чисел 61 или 63.
б) Найдите натуральное число a, если известно, что из следующих утверждений два истинны, а одно ложно:
1) остаток от деления числа a на число 12 равен 8;
2) остаток от деления числа a на число 12 равен 9;
3) a — одно из чисел 56 или 58.

Уровень С

С1. Найдите x, если:
а) $x^3 - 301^3 - 3 \cdot 301^2 + 902$; б) $x^3 - 201^3 - 3 \cdot 201^2 + 602$.

С2. Найдите число a, если:
а) $2a^3 - 321^3 + 321^2 + 321 \cdot 320 + 320^2 + 320^3$;
б) $2a^3 - 417^3 + 417^2 + 417 \cdot 416 + 416^2 + 416^3$.

С3. Не вычисляя произведение, сравните:
а) $87 \cdot 88 \cdot 89$ и 891384; б) $95 \cdot 96 \cdot 97$ и 974640.

С4. Не вычисляя произведение, проверьте, равны ли:
а) $752 \cdot 753 \cdot 754$ и 426957014;
б) $771 \cdot 772 \cdot 773$ и 460098866.

6 Глава 1

Универсальный многоуровневый сборник задач. Алгебра и начала математического анализа

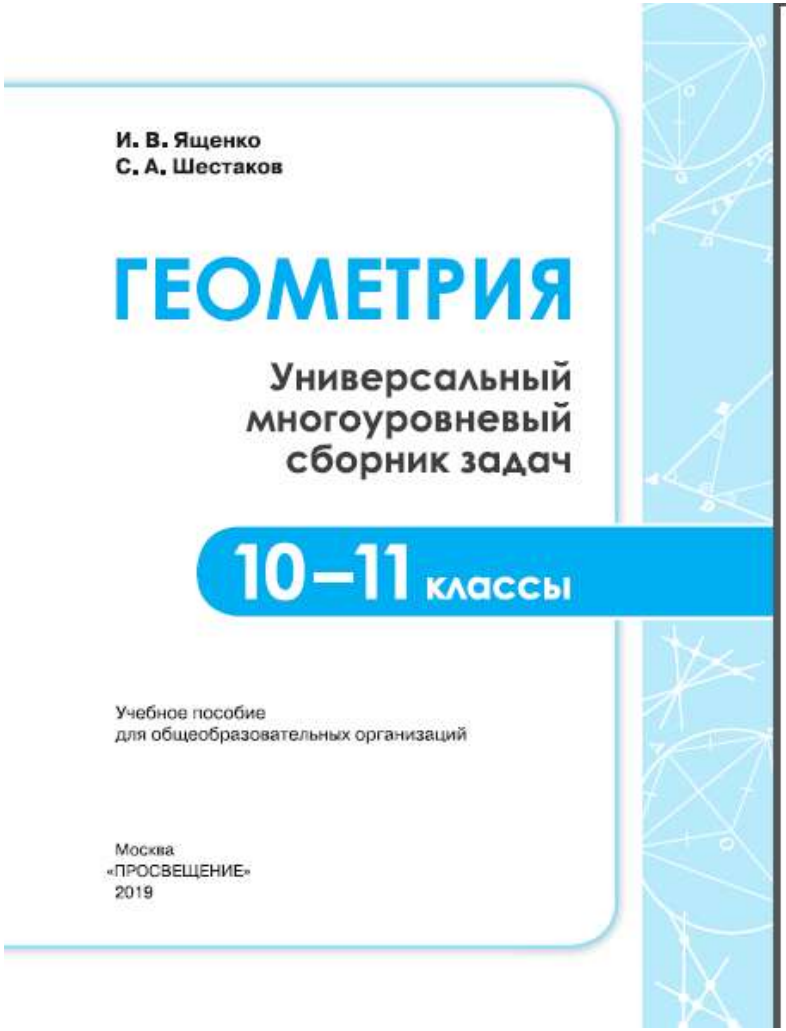
Все задачи в сборнике распределены по главам (крупным тематическим разделам), которые, в свою очередь, разбиты на параграфы (более мелкие подразделы), сформированные в соответствии с функционально-алгебраическими или содержательными линиями школьного курса алгебры и начал математического анализа.

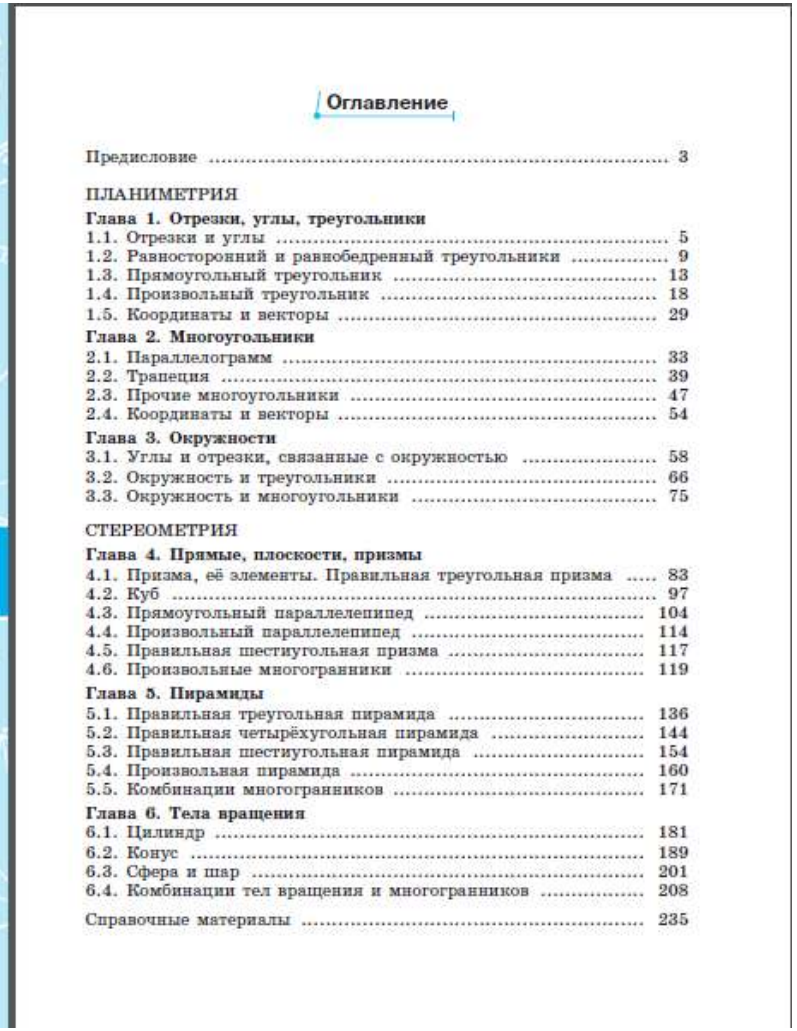
Всего в задачнике 10 глав: «Числа и числовые выражения», «Алгебраические выражения», «Уравнения», «Системы уравнений», «Неравенства и системы неравенств», «Задачи с текстовым условием», «Представление данных, статистика, вероятность», «Функции и графики», «Начала математического анализа. Исследование функций», «Уравнения и неравенства с параметром и нестандартные уравнения и неравенства».

Задачник трёхуровневый.

Для удобства использования в урочной деятельности каждая задача представлена в двух равноценных вариантах а) и б).

Универсальный многоуровневый сборник задач. Геометрия. 10-11 классы





Оглавление

Предисловие 3

ПЛАНИМЕТРИЯ

Глава 1. Отрезки, углы, треугольники
1.1. Отрезки и углы 5
1.2. Равносторонний и равнобедренный треугольники 9
1.3. Прямоугольный треугольник 13
1.4. Произвольный треугольник 18
1.5. Координаты и векторы 29

Глава 2. Многоугольники
2.1. Параллелограмм 33
2.2. Трапеция 39
2.3. Прочие многоугольники 47
2.4. Координаты и векторы 54

Глава 3. Окружности
3.1. Углы и отрезки, связанные с окружностью 58
3.2. Окружность и треугольники 66
3.3. Окружность и многоугольники 75

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Глава 4. Прямые, плоскости, призмы
4.1. Призма, её элементы. Правильная треугольная призма 83
4.2. Куб 97
4.3. Прямоугольный параллелепипед 104
4.4. Произвольный параллелепипед 114
4.5. Правильная шестиугольная призма 117
4.6. Произвольные многогранники 119

Глава 5. Пирамиды
5.1. Правильная треугольная пирамида 136
5.2. Правильная четырёхугольная пирамида 144
5.3. Правильная шестиугольная пирамида 154
5.4. Произвольная пирамида 160
5.5. Комбинации многогранников 171

Глава 6. Тела вращения
6.1. Цилиндр 181
6.2. Конус 189
6.3. Сфера и шар 201
6.4. Комбинации тел вращения и многогранников 208

Справочные материалы 235

Универсальный многоуровневый сборник задач. Геометрия. 10-11 классы

Учебное пособие представляет собой универсальный многоуровневый сборник задач по геометрии для 10—11 классов.
Все задачи распределены по двум крупным тематическим разделам: «Планиметрия» и «Стереометрия», каждый из которых разбит на три главы. В разделе «Планиметрия» это главы «Отрезки, углы, треугольники», «Многоугольники», «Окружности», а в разделе «Стереометрия» это главы «Прямые, плоскости, призмы», «Пирамиды», «Тела вращения».
Такая структура позволяет использовать задачник в качестве дополнения при работе с любым учебно-методическим комплектом. Она является иерархической, т. е. задачи главы с большим номером включают в себя и задачи на комбинации фигур, указанных в названии главы, и фигур из предыдущих глав. Поэтому задачи по теме «Вписанная окружность треугольника» находятся в главе «Окружности», а не в главе «Отрезки, углы, треугольники». Такой порядок в целом соответствует последовательности изучения материала в средней школе и представляется целесообразным. Данный задачник трёхуровневый.

Универсальный многоуровневый сборник задач. Геометрия. 10-11 классы

Планиметрия

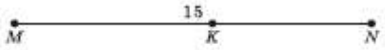
Глава 1. Отрезки, углы, треугольники

1.1. Отрезки и углы

Уровень А

А1. а) Точка M лежит на отрезке AB, $AM : MB = 3 : 4$, $MB = 12$. Найдите длину отрезка AB.

б) Точка K лежит на отрезке MN, $KN : MN = 2 : 5$, $MN = 15$. Найдите длину отрезка KN.

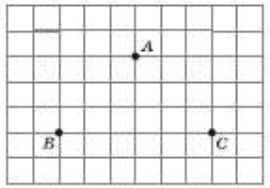


А2. а) Точка A делит отрезок MN в отношении $2 : 7$, $MN = 27$. Найдите длину отрезка AN.

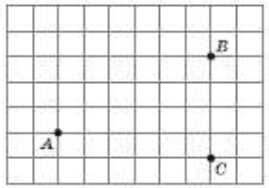
б) Точка K лежит на отрезке AB, $KB : AB = 5 : 6$, $AB = 18$. Найдите длину отрезка AK.

А3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены три точки: A, B и C. Найдите расстояние от точки A до середины отрезка BC.

а)



б)



Стереометрия

Глава 4. Прямые, плоскости, призмы

4.1. Призма, её элементы. Правильная треугольная призма

Уровень А

А1. а) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 2. Найдите угол между прямыми CC_1 и BA_1. Ответ дайте в градусах.

б) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1. Найдите угол между прямыми BB_1 и CA_1. Ответ дайте в градусах.

А2. а) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известно, что $AB = \sqrt{3}AA_1$. Найдите угол между прямыми AB_1 и CC_1. Ответ дайте в градусах.

б) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известно, что $AA_1 = \sqrt{3}AB$. Найдите угол между прямыми AB_1 и CC_1. Ответ дайте в градусах.

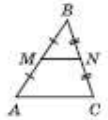
А3. а) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Найдите угол ACA_1, если боковое ребро BB_1 равно 10, а высота одного из оснований равна 15. Ответ дайте в градусах.

б) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Найдите угол AB_1A_1, если боковое ребро AA_1 равно 6, а высота одного из оснований равна $3\sqrt{3}$. Ответ дайте в градусах.

А4. а) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, точка M — середина ребра BC. Найдите косинус угла AMA_1, если боковое ребро CC_1 равно 4, а сторона основания равна $2\sqrt{3}$.

Справочные материалы

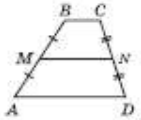
Средняя линия треугольника и трапеции



MN — средняя линия

$MN \parallel AC$

$MN = \frac{AC}{2}$



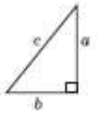
$BC \parallel AD$

MN — средняя линия

$MN \parallel AD$

$MN = \frac{BC + AD}{2}$

Теорема Пифагора



$a^2 + b^2 = c^2$

Окружность

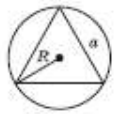
Длина окружности

$C = 2\pi r$

Площадь круга

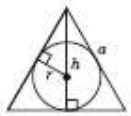
$S = \pi r^2$

Описанная и вписанная окружности правильного треугольника



$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$



$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Серия пособий «Профильная школа»

Предлагаемое пособие обеспечивает организацию элективных курсов в средней школе. Материалы пособия можно использовать на уроках физики, математики, биологии, в качестве дополнительных.

Содержание пособия направлено на развитие естественно-научного профильного обучения для формирования у обучающихся мотивации к профессиональному самоопределению в научной и инженерной областях.

Особое внимание уделено современным методам математического моделирования в сферах экономики, социологии, логистики.

Содержание пособия обеспечивает сопровождение образовательной деятельности учащихся в разных формах: учебное занятие, практическая работа, учебный проект, учебное исследование, учебная экскурсия и др.

Материал пособия не только познакомит учащегося с современными исследованиями в области математического моделирования, но и поможет в выборе темы для

Серия пособий «Профильная школа»

Содержание пособия обеспечивает выполнение обучающимися самостоятельно под руководством учителя (тьютора) индивидуального проекта в рамках одного или нескольких изучаемых учебных предметов, курсов в избранной области деятельности (познавательной, практической, учебно-исследовательской, социальной, художественно-творческой). Предлагаемый курс отражает процессы развития коммуникативных навыков, критического мышления; развивает способности к инновационной, аналитической, творческой, интеллектуальной деятельности.

Система заданий курса направлена на развитие учебно-исследовательских компетенций школьников — способности постановки цели и формулирования гипотезы исследования, планирования работы, отбора и интерпретации необходимой информации, структурирования аргументации результатов исследования на основе собранных данных, презентации результатов. Результат освоения курса должен быть представлен в виде завершённого учебного исследования или разработанного проекта: информационного, творческого, социального, прикладного, конструкторского, инженерного

Серия пособий «Я сдам ЕГЭ!»

Курс самоподготовки. Алгебра. База.

Курс самоподготовки. Геометрия. База.

Курс самоподготовки. Алгебра и начала математического анализа. База.

Курс самоподготовки. Алгебра. Профиль.

Курс самоподготовки. Геометрия. Профиль.

Курс самоподготовки. Алгебра и начала математического анализа. Профиль.

Типовые задания. Алгебра. База.

Типовые задания. Геометрия. База.

Типовые задания. Алгебра и начала математического анализа. База.

Типовые задания. Алгебра. Профиль.

Типовые задания. Геометрия. Профиль.

Типовые задания. Алгебра и начала математического анализа. Профиль.

25 лучших вариантов ЕГЭ. Профиль.

15 новых вариантов ЕГЭ. База.

15 новых вариантов ЕГЭ. Профиль.

Я сдам ЕГЭ. Математика. Модульные курсы. 10-11 классы

Базовый уровень

Профильный уровень

Особенности пособий серии «Я сдам ЕГЭ!»

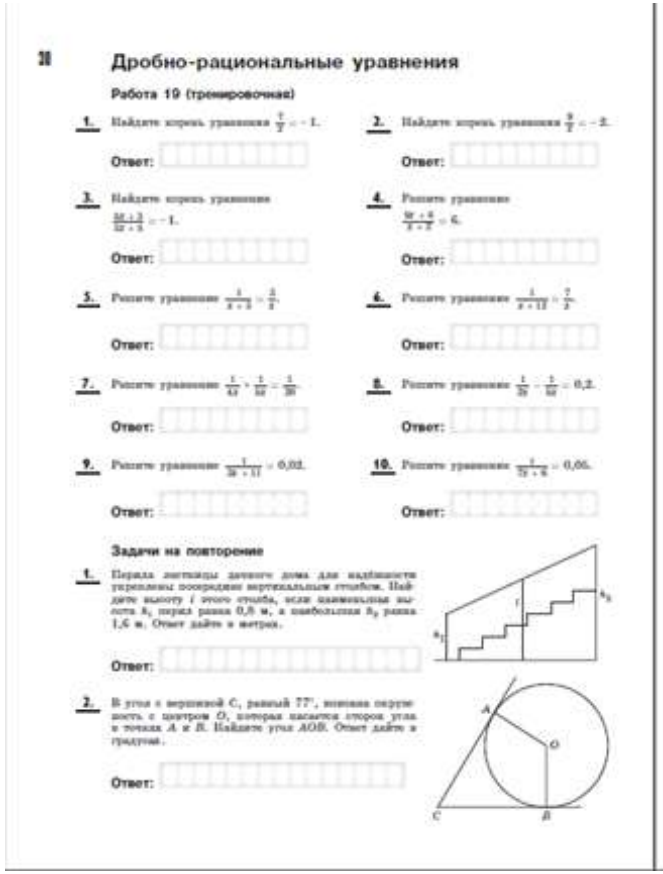
- Учебный курс «Я сдам ЕГЭ!» включает пособия «Курс самоподготовки. Технология решения заданий» и «Типовые задания»;
- ориентирован на любой УМК;
- содержит методически структурированные специально подготовленные материалы для групповой и индивидуальной подготовки к ЕГЭ;
- основная часть заданий аналогична реальным заданиям ЕГЭ по математике и адаптирована под их формат;
- методические пособия дают возможность учителю использовать учебный материал, разработанный на основе анализа результатов ЕГЭ, преодолеть типичные проблемы и ошибки при выполнении заданий ЕГЭ.

Преимущества серии пособий «Я сдам ЕГЭ»

- Раздел «Ответы» позволяет оперативно проверить правильность своих решений и сделать вывод об уровне подготовленности.
- Материал пособий может стать основой для внеурочных самостоятельных и факультативных занятий по подготовке к Единому государственному экзамену по математике.
- Систематические занятия по данным пособиям (даже в случае существенных пробелов в знаниях при начале работы с ними) дают возможность сформировать устойчивые навыки решения основных типов задач, необходимых для применения в реальных жизненных ситуациях и успешной сдачи ЕГЭ по математике.

Типовые задания

Задания пособий разделены на отдельные темы. В каждой теме представлено по два варианта тренировочных работ, которые наряду с основным блоком задач включают также задачи на повторение по другим темам.



38

Дробно-рациональные уравнения

Работа 19 (тренировочная)

1. Найдите корень уравнения $\frac{7}{7} = -1$.
Ответ:

2. Найдите корень уравнения $\frac{9}{7} = -2$.
Ответ:

3. Найдите корень уравнения $\frac{3x+2}{3x+5} = -1$.
Ответ:

4. Решите уравнение $\frac{9x+6}{5+8} = 6$.
Ответ:

5. Решите уравнение $\frac{1}{x+5} = \frac{2}{7}$.
Ответ:

6. Решите уравнение $\frac{1}{x+12} = \frac{7}{2}$.
Ответ:

7. Решите уравнение $\frac{1}{42} + \frac{1}{56} = \frac{1}{20}$.
Ответ:

8. Решите уравнение $\frac{1}{20} - \frac{1}{56} = 0{,}2$.
Ответ:

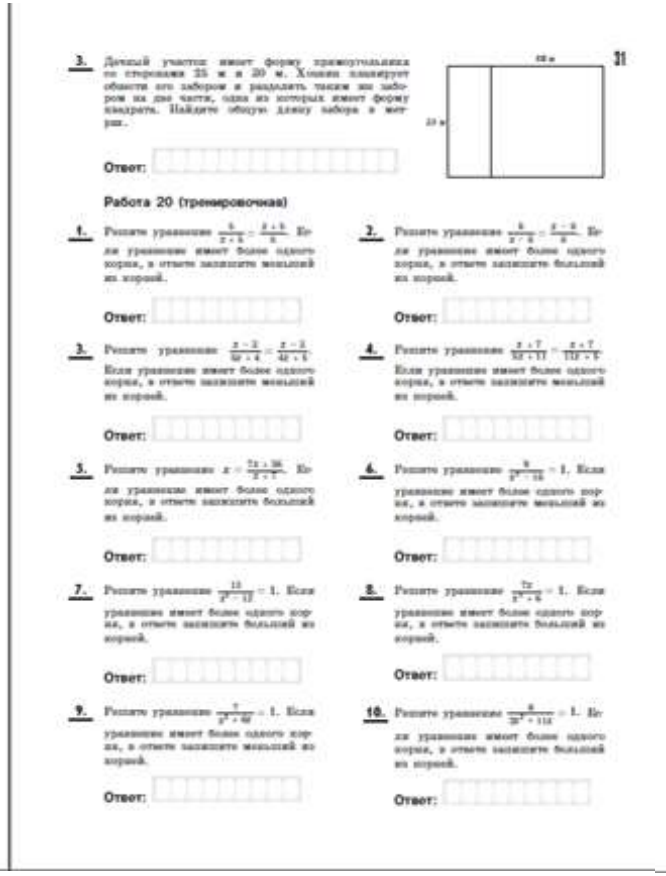
9. Решите уравнение $\frac{1}{30+11} = 0{,}02$.
Ответ:

10. Решите уравнение $\frac{1}{12+6} = 0{,}05$.
Ответ:

Задачи на повторение

1. Перила лестницы данного дома для надёжности укреплены посередине вертикальным столбом. Найдите высоту l этого столба, если наименьшая высота h_1 перил равна 0,8 м, а наибольшая h_2 равна 1,6 м. Ответ дайте в метрах.
Ответ:

2. В угле с вершиной C, равный 77°, вписана окружность с центром O, которая касается сторон угла в точках A и B. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.
Ответ:



3. Дачный участок имеет форму прямоугольника со сторонами 25 м и 20 м. Хозяин планирует обнести его забором и разделить таким же забором на две части, одна из которых имеет форму квадрата. Найдите общую длину забора в метрах.
Ответ:

31

Работа 20 (тренировочная)

1. Решите уравнение $\frac{6}{x+5} = \frac{x+5}{6}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.
Ответ:

2. Решите уравнение $\frac{6}{x+5} = \frac{x-5}{6}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.
Ответ:

3. Решите уравнение $\frac{x-3}{4x+4} = \frac{x-3}{4x+4}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.
Ответ:

4. Решите уравнение $\frac{x+7}{12+11} = \frac{x+7}{112+5}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.
Ответ:

5. Решите уравнение $x = \frac{7x+36}{x+1}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.
Ответ:

6. Решите уравнение $\frac{8}{x^2-16} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.
Ответ:

7. Решите уравнение $\frac{15}{x^2-17} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.
Ответ:

8. Решите уравнение $\frac{7x}{x^2+6} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.
Ответ:

9. Решите уравнение $\frac{7}{x^2+49} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.
Ответ:

10. Решите уравнение $\frac{8}{x^2+114} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.
Ответ:

28

МОДУЛЬ «АЛГЕБРА»

2. УРАВНЕНИЯ

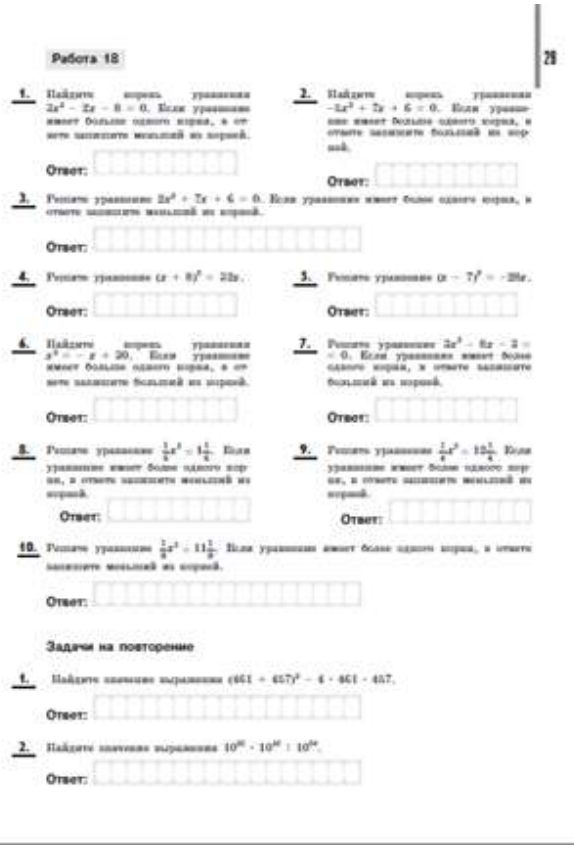
Линейные и квадратные уравнения

Работа 17

1. Решите уравнение $\frac{3}{17}x = 2\frac{4}{17}$. Ответ:
2. Решите уравнение $2x\frac{3}{11} = 6\frac{8}{11}$. Ответ:
3. Решите уравнение $(3x+5)^2 = (17-2x)^2$. Ответ:
4. Решите уравнение $(4x+5)^2 = (4x-7)^2$. Ответ:
5. Решите уравнение $x^2 - 17 = (x-17)^2$. Ответ:
6. Решите уравнение $x^2 + 11 = (x+11)^2$. Ответ:
7. Решите уравнение $\frac{-2+4x}{3} = \frac{-4+2x}{9}$. Ответ:
8. Решите уравнение $\frac{4x-5}{3} = \frac{3x-6}{6}$. Ответ:
9. Решите уравнение $x^2 = (x-7)^2$. Ответ:
10. Решите уравнение $x^2 = (x+9)^2$. Ответ:

Задачи на повторение

1. Найдите значение выражения $(224^2 - 276^2) : 500$.
Ответ:
2. Найдите значение выражения $192 \cdot 72 - 72 \cdot 292$.
Ответ:
3. Найдите значение выражения $(89 \cdot 72 + 28 \cdot 89) : 49$.
Ответ:



29

Работа 18

1. Найдите корень уравнения $2x^2 - 2x - 8 = 0$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите меньший из корней.
Ответ:

2. Найдите корень уравнения $-3x^2 + 7x + 6 = 0$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите больший из корней.
Ответ:

3. Решите уравнение $2x^2 + 7x + 6 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.
Ответ:

4. Решите уравнение $(x+8)^2 = 22x$.
Ответ:

5. Решите уравнение $(x-7)^2 = -28x$.
Ответ:

6. Найдите корень уравнения $x^2 = -x + 20$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите больший из корней.
Ответ:

7. Решите уравнение $2x^2 - 8x - 2 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.
Ответ:

8. Решите уравнение $\frac{1}{4}x^2 = 1\frac{1}{4}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.
Ответ:

9. Решите уравнение $\frac{1}{4}x^2 = 10\frac{1}{4}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.
Ответ:

10. Решите уравнение $\frac{1}{4}x^2 = 11\frac{1}{4}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.
Ответ:

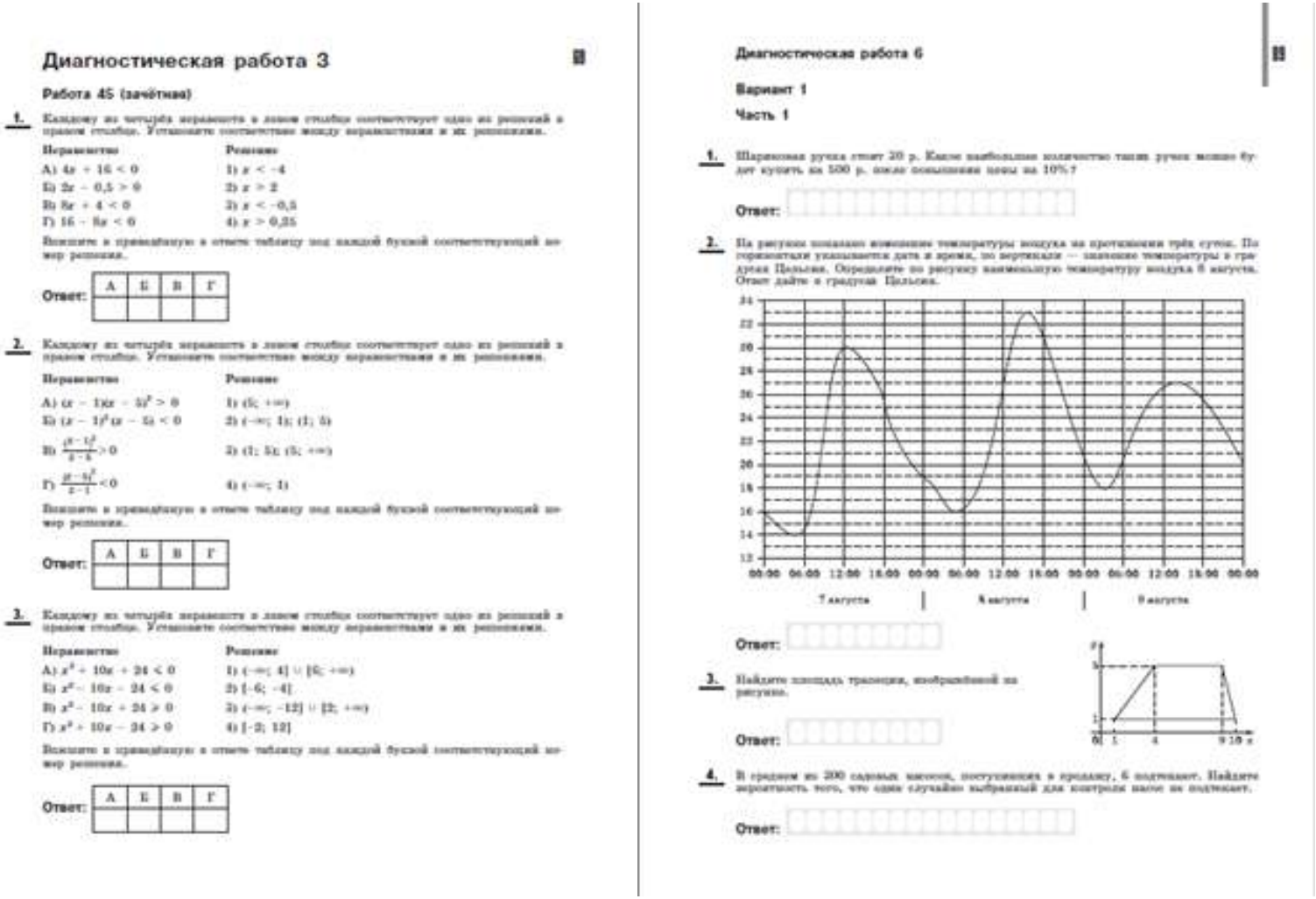
Задачи на повторение

1. Найдите значение выражения $(461 + 457)^2 - 4 \cdot 461 \cdot 457$.
Ответ:
2. Найдите значение выражения $10^{60} \cdot 10^{56} : 10^{54}$.
Ответ:

Типовые задания

В пособии для базового уровня каждый крупный раздел модуля завершается диагностическими работами повторения и обобщения.

Для итогового контроля в конце части 3 пособий отдельным блоком даются диагностические работы в формате варианта ЕГЭ или его части.



Диагностическая работа 3

Работа 45 (зачётная)

1. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

Неравенство	Решение
А) $4x + 16 < 0$	1) $x < -4$
Б) $2x - 0{,}5 > 0$	2) $x > 2$
В) $8x + 4 < 0$	3) $x < -0{,}5$
Г) $16 - 8x < 0$	4) $x > 0{,}25$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий номер решения.

Ответ:

А	Б	В	Г

2. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

Неравенство	Решение
А) $(x - 1)(x - 5)^2 > 0$	1) $(5; +\infty)$
Б) $(x - 1)^2(x - 5) < 0$	2) $(-\infty; 1); (1; 5)$
В) $\frac{(x-1)^2}{5-x} > 0$	3) $(1; 5); (5; +\infty)$
Г) $\frac{(x-5)^2}{x-1} < 0$	4) $(-\infty; 1)$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий номер решения.

Ответ:

А	Б	В	Г

3. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

Неравенство	Решение
А) $x^2 + 10x + 24 < 0$	1) $(-\infty; 4] \cup [6; +\infty)$
Б) $x^2 - 10x - 24 < 0$	2) $[-6; -4]$
В) $x^2 - 10x + 24 \geq 0$	3) $(-\infty; -12] \cup [2; +\infty)$
Г) $x^2 + 10x - 24 \geq 0$	4) $[-2; 12]$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий номер решения.

Ответ:

А	Б	В	Г

Диагностическая работа 6

Вариант 1

Часть 1

1. Шариковая ручка стоит 20 р. Какое наибольшее количество таких ручек можно будет купить на 500 р. после повышения цены на 10%?

Ответ:

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указываются дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 8 августа. Ответ дайте в градусах Цельсия.

Ответ:

3. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.

Ответ:

4. В среднем из 200 садовых насосов, поступающих в продажу, 6 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Ответ:

Курс самоподготовки

В начале каждого занятия приводится материал на повторение основных понятий, фактов, идей и методов решения, проиллюстрированных примерами.
Затем даётся блок тренировочных работ, предназначенный для отработки навыков решения задач по изучаемой теме.

Занятие 5. Понятие логарифма. Свойства логарифмов. Вычисление значений логарифмических выражений

При повторении темы «Преобразование логарифмических выражений» следует вспомнить ряд основных формул, связанных с логарифмами:

1) $a^{\log_a b} = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$;
2) $\log_c a + \log_c b = \log_c (ab)$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$;
3) $\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$;
4) $\log_c a^b = b\log_c a$, где $a > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$;
5) $\log_{c^d} a = \frac{1}{d}\log_c a$, где $a > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, $d \neq 0$;
6) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $b \neq 1$, $c \neq 1$ и, в частности, $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, где $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$;
7) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$.

Большинство заданий на преобразование логарифмических выражений и вычисление их значений можно отнести к одной из следующих групп:
- упражнения на непосредственное использование определения и свойств логарифмов;
- упражнения на вычисление значения логарифмического выражения по данному значению другого выражения или логарифма.

Пример 1. Найдите значение выражения $11 \cdot 6^{\log_6 2}$.

Решение. Применяя основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$, получим $11 \cdot 6^{\log_6 2} = 11 \cdot 2 = 22$.

Ответ: 22.

Пример 2. Найдите значение выражения $\log_6 135 - \log_6 3{,}75$.

Решение. Поскольку основания логарифмов одинаковы, данное выражение приводится к логарифму частного: $\log_6 135 - \log_6 3{,}75 = \log_6 \frac{135}{3{,}75} = \log_6 36 = 2$.

Ответ: 2.

Пример 3. Найдите значение выражения $\left(7^{\log_5 75}\right)^{\log_7 5}$.

Решение. Поскольку $(a^b)^c = (a^c)^b$, данное выражение можно преобразовать так:

$$\left(7^{\log_5 75}\right)^{\log_7 5} = \left(7^{\log_7 5}\right)^{\log_5 75} = 5^{\log_5 75} = 75.$$

Ответ: 75.

Пример 4. Найдите значение выражения $\log_a(ab^2)$, если $\log_a a = \frac{1}{7}$.

Решение. Из условия следует, что a и b — положительные числа, отличные от 1. Поскольку логарифм произведения двух чисел равен сумме логарифмов этих чисел по

тому же основанию, получим $\log_a(ab^2) = \log_a a + \log_a b^2 = 1 + \log_a b^2$. Последовательно применяя формулы $\log_c a^b = b\log_c a$ и $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, находим:

$$1 + \log_a b^2 = 1 + 2\log_a b = 1 + 2 \cdot \frac{1}{\log_b a}.$$

По условию $\log_b a = \frac{1}{7}$, значит, искомое значение равно $1 + 2 \cdot 7 = 22$.

Ответ: 22.

Тренировочная работа 9

1. Найдите значение выражения $\log_6 0{,}6 + \log_6 60$.
   Ответ: _____
2. Найдите значение выражения $\log_9 8{,}1 - \log_9 0{,}1$.
   Ответ: _____
3. Найдите значение выражения $19 \cdot 6^{\log_6 2}$.
   Ответ: _____
4. Найдите значение выражения $9^{\log_3 2}$.
   Ответ: _____
5. Вычислите значение выражения $\log_9 27$.
   Ответ: _____
6. Вычислите значение выражения $\left(2^{\log_2 3}\right)^{\log_3 2}$.
   Ответ: _____
7. Вычислите значение выражения $\log_{\frac{1}{7}} 36$.
   Ответ: _____
8. Вычислите значение выражения $\log_{\frac{1}{7}} \sqrt{7}$.
   Ответ: _____
9. Найдите значение выражения $\frac{\log_2 36}{\log_2 6}$.
   Ответ: _____
10. Найдите значение выражения $\frac{\log_{49} 7}{\log_{\frac{1}{7}} 7}$.
    Ответ: _____

Тренировочная работа 10

1. Найдите $\log_a(ab)$, если $\log_a b = 7$.
   Ответ: _____
2. Найдите $\log_a \frac{b}{a}$, если $\log_a b = -13$.
   Ответ: _____
3. Найдите $\log_a(ab)$, если $\log_a a = \frac{1}{11}$.
   Ответ: _____
4. Найдите $\log_a \frac{a}{b}$, если $\log_a a = \frac{1}{2}$.
   Ответ: _____

5. Найдите $\log_a(ab^2)$, если $\log_a b = -2$.
   Ответ: _____
6. Найдите $\log_a \frac{a}{b^2}$, если $\log_a b = 3$.
   Ответ: _____
7. Найдите $\log_a \frac{a^2}{b^7}$, если $\log_a a = 7$.
   Ответ: _____
8. Найдите значение выражения $\log_a(a\sqrt{b})$, если $\log_a a = \frac{1}{7}$.
   Ответ: _____
9. Найдите значение выражения $\log_a \sqrt[6]{\frac{a}{b}}$, если $\log_a b = 6$.
   Ответ: _____
10. Найдите значение выражения $\log_a \sqrt[3]{a^5 b}$, если $a = \frac{1}{7}$.
    Ответ: _____

Занятие 6. Вычисления и преобразования по данным формулам. Подготовительные задачи

Это занятие посвящено задачам на вычисления и преобразования по данным формулам. С такого рода заданиями уже встречались те, кто проходил Государственную итоговую аттестацию в конце 9 класса. Есть подобные задачи и в ЕГЭ по математике — как базового, так и профильного уровня. По сути, эти задачи представляют собой формулы из разных областей знаний, причём значения всех величин, за исключением одной, в этих формулах известны. Требуется найти значение именно этой величины. Начнём с задач базового уровня, рассмотрев несколько примеров их решения.

Пример 1. Перевести температуру из шкалы Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32)$, где t_C — температура в градусах по шкале Цельсия, t_F — температура в градусах по шкале Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует 365 градусов по шкале Фаренгейта?

Решение. По условию задачи $t_F = 365$. Поэтому:

$$t_C = \frac{5}{9}(365 - 32) = \frac{5}{9} \cdot 333 = 5 \cdot 37 = 185.$$

Ответ: 185.

Пример 2. Потенциальная энергия тела (в джоулях) в поле тяготения Земли вблизи поверхности вычисляется по формуле $E = mgh$, где m — масса тела (в килограммах), g — ускорение свободного падения, а h — высота (в метрах), на которой находится это тело, относительно условного нуля. Пользуясь этой формулой, найдите m (в килограммах), если $g = 9{,}8$ м/с^2, $h = 20$ м, а $E = 98$ Дж.

Решение. Найдём искомую массу, используя данную формулу и данные значения остальных величин:

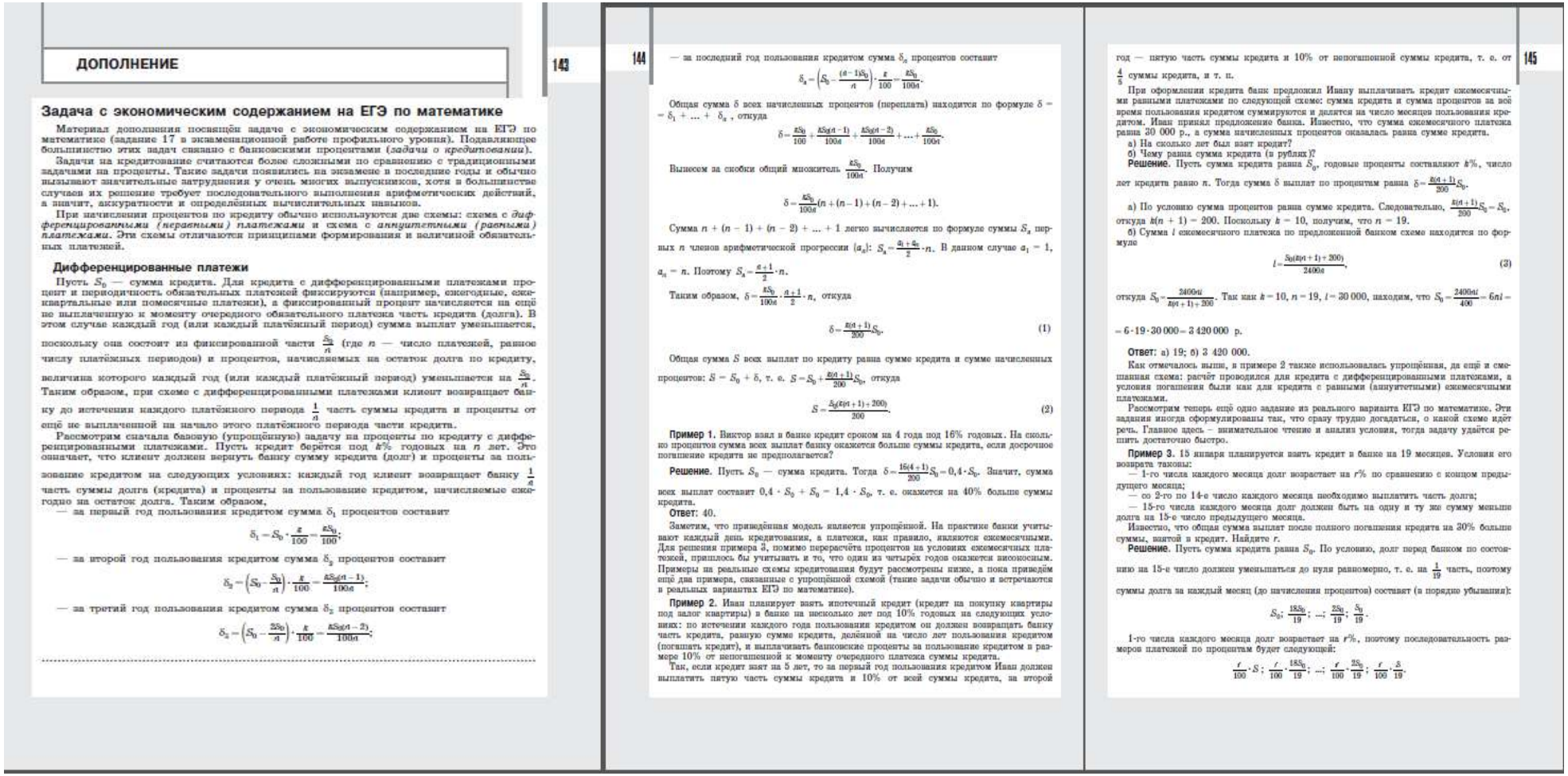
$$m = \frac{E}{gh} = \frac{98}{9{,}8 \cdot 20} = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

Пример 3. Площадь треугольника со сторонами a, b, c можно найти по формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$. Найдите площадь треугольника, если длины его сторон равны 25, 60, 65.

Курс самоподготовки

В части 2 пособия профильного уровня в качестве дополнений приводится разбор решений некоторых задач с экономическим содержанием, подобных задачам, вошедшим во вторую часть ЕГЭ по математике профильного уровня.



ДОПОЛНЕНИЕ

143

Задача с экономическим содержанием на ЕГЭ по математике

Материал дополнения посвящён задаче с экономическим содержанием на ЕГЭ по математике (задание 17 в экзаменационной работе профильного уровня). Подавляющее большинство этих задач связано с банковскими процентами (*задачи о кредитовании*).

Задачи на кредитование считаются более сложными по сравнению с традиционными задачами на проценты. Такие задачи появились на экзамене в последние годы и обычно вызывают значительные затруднения у очень многих выпускников, хотя в большинстве случаев их решение требует последовательного выполнения арифметических действий, а значит, аккуратности и определённых вычислительных навыков.

При начислении процентов по кредиту обычно используются две схемы: схема с *дифференцированными (неравными) платежами* и схема с *аннуитетными (равными) платежами*. Эти схемы отличаются принципами формирования и величиной обязательных платежей.

Дифференцированные платежи

Пусть S_0 — сумма кредита. Для кредита с дифференцированными платежами процент и периодичность обязательных платежей фиксируются (например, ежегодные, ежеквартальные или помесячные платежи), а фиксированный процент начисляется на ещё не выплаченную к моменту очередного обязательного платежа часть кредита (долга). В этом случае каждый год (или каждый платёжный период) сумма выплат уменьшается, поскольку она состоит из фиксированной части $\frac{S_0}{n}$ (где n — число платежей, равное числу платёжных периодов) и процентов, начисляемых на остаток долга по кредиту, величина которого каждый год (или каждый платёжный период) уменьшается на $\frac{S_0}{n}$. Таким образом, при схеме с дифференцированными платежами клиент возвращает банку до истечения каждого платёжного периода $\frac{1}{n}$ часть суммы кредита и проценты от ещё не выплаченной на начало этого платёжного периода части кредита.

Рассмотрим сначала базовую (упрощённую) задачу на проценты по кредиту с дифференцированными платежами. Пусть кредит берётся под k% годовых на n лет. Это означает, что клиент должен вернуть банку сумму кредита (долг) и проценты за пользование кредитом на следующих условиях: каждый год клиент возвращает банку $\frac{1}{n}$ часть суммы долга (кредита) и проценты за пользование кредитом, начисляемые ежегодно на остаток долга. Таким образом,

— за первый год пользования кредитом сумма δ_1 процентов составит

$$\delta_1 = S_0 \cdot \frac{k}{100} = \frac{kS_0}{100};$$

— за второй год пользования кредитом сумма δ_2 процентов составит

$$\delta_2 = \left(S_0 - \frac{S_0}{n}\right) \cdot \frac{k}{100} = \frac{kS_0(n-1)}{100n};$$

— за третий год пользования кредитом сумма δ_3 процентов составит

$$\delta_3 = \left(S_0 - \frac{2S_0}{n}\right) \cdot \frac{k}{100} = \frac{kS_0(n-2)}{100n};$$

144

— за последний год пользования кредитом сумма δ_n процентов составит

$$\delta_n = \left(S_0 - \frac{(n-1)S_0}{n}\right) \cdot \frac{k}{100} = \frac{kS_0}{100n}.$$

Общая сумма δ всех начисленных процентов (переплата) находится по формуле $\delta = \delta_1 + \ldots + \delta_n$, откуда

$$\delta = \frac{kS_0}{100} + \frac{kS_0(n-1)}{100n} + \frac{kS_0(n-2)}{100n} + \ldots + \frac{kS_0}{100n}.$$

Вынесем за скобки общий множитель $\frac{kS_0}{100n}$. Получим

$$\delta = \frac{kS_0}{100n}(n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1).$$

Сумма $n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1$ легко вычисляется по формуле суммы S_n первых n членов арифметической прогрессии (a_n): $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. В данном случае $a_1 = 1$, $a_n = n$. Поэтому $S_n = \frac{n+1}{2} \cdot n$.

Таким образом, $\delta = \frac{kS_0}{100n} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot n$, откуда

$$\delta = \frac{k(n+1)}{200} S_0. \qquad (1)$$

Общая сумма S всех выплат по кредиту равна сумме кредита и сумме начисленных процентов: $S = S_0 + \delta$, т. е. $S = S_0 + \frac{k(n+1)}{200} S_0$, откуда

$$S = \frac{S_0(k(n+1) + 200)}{200}. \qquad (2)$$

Пример 1. Виктор взял в банке кредит сроком на 4 года под 16% годовых. На сколько процентов сумма всех выплат банку окажется больше суммы кредита, если досрочное погашение кредита не предполагается?

Решение. Пусть S_0 — сумма кредита. Тогда $\delta = \frac{16(4+1)}{200} S_0 = 0{,}4 \cdot S_0$. Значит, сумма всех выплат составит $0{,}4 \cdot S_0 + S_0 = 1{,}4 \cdot S_0$, т. е. окажется на 40% больше суммы кредита.

Ответ: 40.

Заметим, что приведённая модель является упрощённой. На практике банки учитывают каждый день кредитования, а платежи, как правило, являются ежемесячными. Для решения примера 3, помимо перерасчёта процентов на условиях ежемесячных платежей, пришлось бы учитывать и то, что один из четырёх годов окажется високосным. Примеры на реальные схемы кредитования будут рассмотрены ниже, а пока приведём ещё два примера, связанные с упрощённой схемой (такие задачи обычно и встречаются в реальных вариантах ЕГЭ по математике).

Пример 2. Иван планирует взять ипотечный кредит (кредит на покупку квартиры под залог квартиры) в банке на несколько лет под 10% годовых на следующих условиях: по истечении каждого года пользования кредитом он должен возвращать банку часть кредита, равную сумме кредита, делённой на число лет пользования кредитом (погашать кредит), и выплачивать банковские проценты за пользование кредитом в размере 10% от непогашенной к моменту очередного платежа суммы кредита.

Так, если кредит взят на 5 лет, то за первый год пользования кредитом Иван должен выплатить пятую часть суммы кредита и 10% от всей суммы кредита, за второй

145

год — пятую часть суммы кредита и 10% от непогашенной суммы кредита, т. е. от $\frac{4}{5}$ суммы кредита, и т. п.

При оформлении кредита банк предложил Ивану выплачивать кредит ежемесячными равными платежами по следующей схеме: сумма кредита и сумма процентов за всё время пользования кредитом суммируются и делятся на число месяцев пользования кредитом. Иван принял предложение банка. Известно, что сумма ежемесячного платежа равна 30 000 р., а сумма начисленных процентов оказалась равна сумме кредита.

а) На сколько лет был взят кредит?

б) Чему равна сумма кредита (в рублях)?

Решение. Пусть сумма кредита равна S_0, годовые проценты составляют k%, число лет кредита равно n. Тогда сумма δ выплат по процентам равна $\delta = \frac{k(n+1)}{200} S_0$.

а) По условию сумма процентов равна сумме кредита. Следовательно, $\frac{k(n+1)}{200} S_0 = S_0$, откуда $k(n+1) = 200$. Поскольку $k = 10$, получим, что $n = 19$.

б) Сумма l ежемесячного платежа по предложенной банком схеме находится по формуле

$$l = \frac{S_0(k(n+1) + 200)}{2400n}, \qquad (3)$$

откуда $S_0 = \frac{2400nl}{k(n+1) + 200}$. Так как $k = 10$, $n = 19$, $l = 30\,000$, находим, что $S_0 = \frac{2400nl}{400} = 6nl = 6 \cdot 19 \cdot 30\,000 = 3\,420\,000$ р.

Ответ: а) 19; б) 3 420 000.

Как отмечалось выше, в примере 2 также использовалась упрощённая, да ещё и смешанная схема: расчёт проводился для кредита с дифференцированными платежами, а условия погашения были как для кредита с равными (аннуитетными) ежемесячными платежами.

Рассмотрим теперь ещё одно задание из реального варианта ЕГЭ по математике. Эти задания иногда сформулированы так, что сразу трудно догадаться, о какой схеме идёт речь. Главное здесь – внимательное чтение и анализ условия, тогда задачу удаётся решить достаточно быстро.

Пример 3. 15 января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение. Пусть сумма кредита равна S_0. По условию, долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно, т. е. на $\frac{1}{19}$ часть, поэтому суммы долга за каждый месяц (до начисления процентов) составят (в порядке убывания):

$$S_0;\ \frac{18S_0}{19};\ \ldots;\ \frac{2S_0}{19};\ \frac{S_0}{19}.$$

1-го числа каждого месяца долг возрастает на r%, поэтому последовательность размеров платежей по процентам будет следующей:

$$\frac{r}{100} \cdot S;\ \frac{r}{100} \cdot \frac{18S_0}{19};\ \ldots;\ \frac{r}{100} \cdot \frac{2S_0}{19};\ \frac{r}{100} \cdot \frac{S_0}{19}.$$

Пособия для подготовки к итоговой аттестации

Пособия по математике 25 лучших вариантов от «Просвещения» содержат:

- 25 вариантов работ ЕГЭ с ответами ко всем заданиям,
- из них 10 вариантов с решением всех заданий части 2
- листы достижения
- критерии оценивания
- бланки ответов №1 и №2

- 25 вариантов работ ОГЭ с ответами ко всем заданиям,
- из них 5 вариантов с решением всех заданий части 2
- листы достижения
- критерии оценивания
- бланки ответов №1 и №2

Пособия по математике 25 лучших вариантов от «Просвещения» содержат:

Первые двадцать вариантов сгруппированы парами: в каждой паре предложены аналогичные задания. Для вариантов 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 даны решения заданий 13—19, позволяющие проверить полноту и точность рассуждений учащегося, а также познакомиться с методами решения подобных задач. Ответы даются ко всем заданиям пособия.

Следует отметить, что варианты 1—10 предназначены для учащихся **10 классов** и рекомендуются для решения по мере изучения программы по математике в 10 классе. Соответственно варианты 11—20 предназначены для учащихся **11 классов** и рекомендуются для решения по мере изучения программы по математике в 11 классе.

Варианты 21—25 рекомендуются для решения учащимися на заключительном этапе подготовки к ЕГЭ по математике на профильном уровне.

Решения и критерии оценивания в пособии «25 лучших вариантов от «Просвещения»

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ С РАЗВЁРНУТЫМ ОТВЕТОМ

ВАРИАНТ 1

13 а) Решите уравнение $2x^2 - 5 + \frac{72}{x^2} + 62\left(\frac{x}{6} - \frac{3}{x}\right) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Решение. а) Заметим, что $\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{2}{3} + \frac{9}{x^2} = \frac{1}{9}\left(x^2 + \frac{36}{x^2}\right) - \frac{2}{3}$. Отсюда

$$x^2 + \frac{36}{x^2} = 9\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^2 + 12.$$

Следовательно, $2x^2 + \frac{72}{x^2} - 5 = 2\left(x^2 + \frac{36}{x^2}\right) - 5 = 2\left(9\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^2 + 12\right) - 5 = 18\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^2 + 19$.

Сделав замену $t = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}$, получим уравнение

$$18t^2 + 62t + 19 = 0. \qquad (1)$$

Дискриминант $D = 62^2 - 4 \cdot 18 \cdot 19 = 2^2 \cdot (31^2 - 9 \cdot 19) = 2^2 \cdot 289 = 2^2 \cdot 17^2 = 51^2$, значит, корни уравнения (1) равны $-\frac{19}{9}$ и $-\frac{1}{2}$. Выполним обратную замену, получим:

1) $\frac{x}{3} - \frac{3}{x} = -\frac{19}{9} \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 19x - 27}{3x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 19x - 27 = 0 \\ 3x \neq 0. \end{cases}$

Отсюда $x = \frac{-19 - \sqrt{457}}{4}$ или $x = \frac{-19 + \sqrt{457}}{4}$.

2) $\frac{x}{3} - \frac{3}{x} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 6}{3x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 \\ 3x \neq 0. \end{cases}$

Отсюда $x = 2$ или $x = -3$.

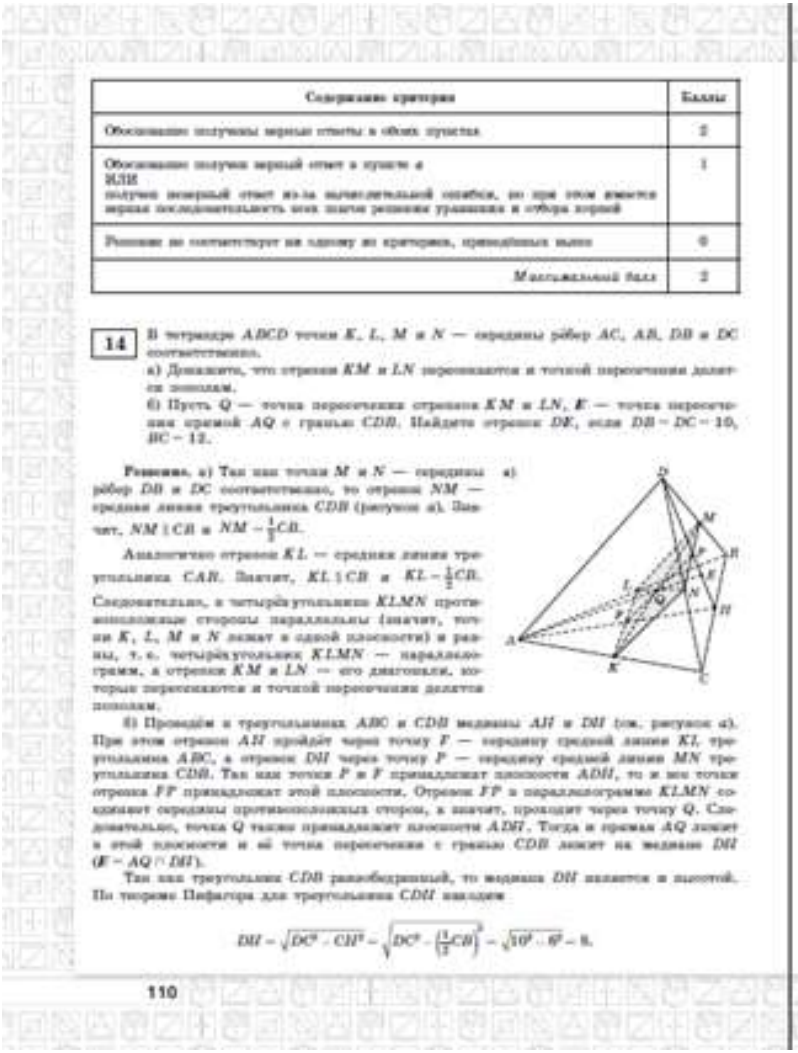
б) Так как числа $\frac{-19 - \sqrt{457}}{4}$ и -3 отрицательны, то они не принадлежат промежутку $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Заметим, что $21 = \sqrt{441} < \sqrt{484} = 22$. Тогда $\frac{-19 + 21}{4} < \frac{-19 + \sqrt{457}}{4} < \frac{-19 + 22}{4}$, $\frac{1}{2} < \frac{-19 + \sqrt{457}}{4} < \frac{3}{4}$. Следовательно, $\frac{-19 + \sqrt{457}}{4} \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Число 2 также принадлежит промежутку $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Ответ. а) $\frac{-19 + \sqrt{457}}{4}$; 2; -3; б) 2; $\frac{-19 + \sqrt{457}}{4}$.

109



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения уравнения и отбора корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

14 В тетраэдре $ABCD$ точки K, L, M и N — середины рёбер AC, AB, DB и DC соответственно.

а) Докажите, что отрезки KM и LN пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

б) Пусть Q — точка пересечения отрезков KM и LN, E — точка пересечения прямой AQ с гранью CDB. Найдите отрезок DE, если $DB = DC = 10$, $BC = 12$.

Решение. а) Так как точки M и N — середины рёбер DB и DC соответственно, то отрезок NM — средняя линия треугольника CDB (рисунок *а*). Значит, $NM \parallel CB$ и $NM = \frac{1}{2}CB$.

Аналогично отрезок KL — средняя линия треугольника CAB. Значит, $KL \parallel CB$ и $KL = \frac{1}{2}CB$.

Следовательно, в четырёхугольнике $KLMN$ противоположные стороны параллельны (значит, точки K, L, M и N лежат в одной плоскости) и равны, т. е. четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм, а отрезки KM и LN — его диагонали, которые пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

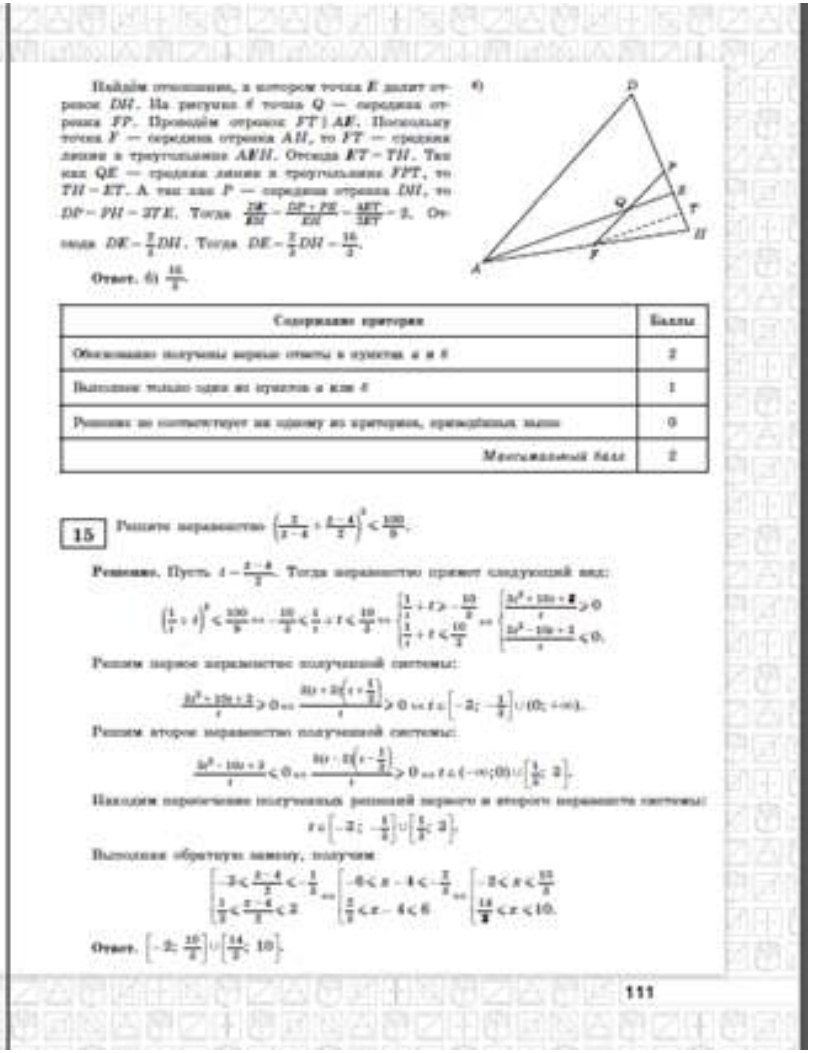
а)

б) Проведём в треугольниках ABC и CDB медианы AH и DH (см. рисунок *а*). При этом отрезок AH пройдёт через точку F — середину средней линии KL треугольника ABC, а отрезок DH через точку P — середину средней линии MN треугольника CDB. Так как точки P и F принадлежат плоскости ADH, то и все точки отрезка FP принадлежат этой плоскости. Отрезок FP в параллелограмме $KLMN$ соединяет середины противоположных сторон, а значит, проходит через точку Q. Следовательно, точка Q также принадлежит плоскости ADH. Тогда и прямая AQ лежит в этой плоскости и её точка пересечения с гранью CDB лежит на медиане DH ($E = AQ \cap DH$).

Так как треугольник CDB равнобедренный, то медиана DH является и высотой. По теореме Пифагора для треугольника CDH находим

$$DH = \sqrt{DC^2 - CH^2} = \sqrt{DC^2 - \left(\frac{1}{2}CB\right)^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

110



Найдём отношение, в котором точка E делит отрезок DH. На рисунке *б* точка Q — середина отрезка FP. Проведём отрезок $FT \parallel AE$. Поскольку точка F — середина отрезка AH, то FT — средняя линия в треугольнике AEH. Отсюда $ET = TH$. Так как QE — средняя линия в треугольнике FPT, то $TH = ET$. А так как P — середина отрезка DH, то $DP = PH = 2TE$. Тогда $\frac{DE}{EH} = \frac{DP + PE}{EH} = \frac{4ET}{2ET} = 2$. Отсюда $DE = \frac{2}{3}DH$. Тогда $DE = \frac{2}{3}DH = \frac{16}{3}$.

б)

Ответ. б) $\frac{16}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*	2
Выполнено только одно из пунктов *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\left(\frac{x}{x-4} + \frac{x-4}{x}\right)^2 \leqslant \frac{100}{9}$.

Решение. Пусть $t = \frac{x-4}{x}$. Тогда неравенство примет следующий вид:

$$\left(\frac{1}{t} + t\right)^2 \leqslant \frac{100}{9} \Leftrightarrow -\frac{10}{3} \leqslant \frac{1}{t} + t \leqslant \frac{10}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{t} + t \geqslant -\frac{10}{3} \\ \frac{1}{t} + t \leqslant \frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3t^2 + 10t + 3}{t} \geqslant 0 \\ \frac{3t^2 - 10t + 3}{t} \leqslant 0. \end{cases}$$

Решим первое неравенство полученной системы:

$$\frac{3t^2 + 10t + 3}{t} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3(t + 3)\left(t + \frac{1}{3}\right)}{t} \geqslant 0 \Leftrightarrow t \in \left[-3; -\frac{1}{3}\right] \cup (0; +\infty).$$

Решим второе неравенство полученной системы:

$$\frac{3t^2 - 10t + 3}{t} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3(t - 3)\left(t - \frac{1}{3}\right)}{t} \geqslant 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{3}; 3\right].$$

Находим пересечение полученных решений первого и второго неравенств системы:

$$t \in \left[-3; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; 3\right].$$

Выполним обратную замену, получим

$$\left[\begin{array}{l} -3 \leqslant \frac{x-4}{x} \leqslant -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \leqslant \frac{x-4}{x} \leqslant 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6 \leqslant x - 4 \leqslant -\frac{x}{3} \\ \frac{x}{3} \leqslant x - 4 \leqslant 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leqslant x \leqslant \frac{12}{3} \\ \frac{18}{2} \leqslant x \leqslant 10. \end{array}\right.$$

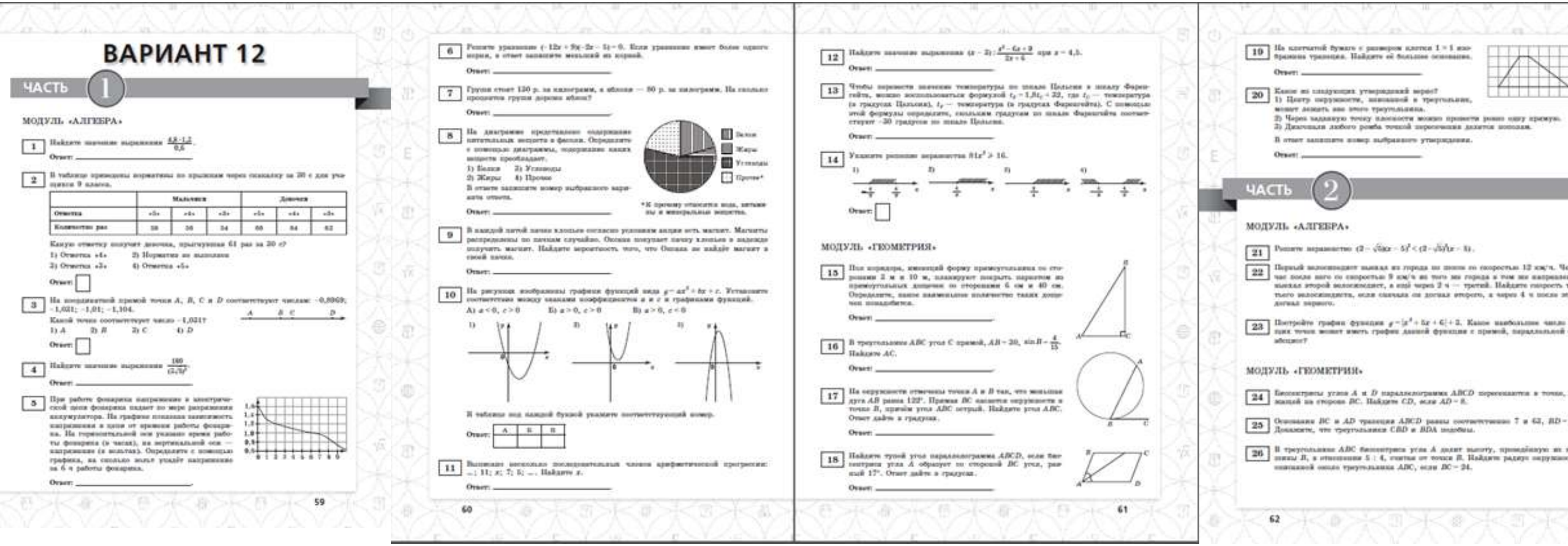
Ответ. $\left[-2; \frac{10}{3}\right] \cup \left[\frac{14}{3}; 10\right]$.

111

Пособия по математике 25 лучших вариантов от «Просвещения» содержат:

- Пособие содержит 25 вариантов с ответами.
- В целях более качественной подготовки в конце приведены полные решения вариантов 1, 6, 11, 16, 21 и решения задач второй части вариантов 2, 7, 12, 17, 22.
- пособие сбалансировано по степени сложности,
- позволяет начать раннюю подготовку к ГИА

Варианты работ в пособии «25 лучших вариантов от «Просвещения»



ВАРИАНТ 12

ЧАСТЬ 1

МОДУЛЬ «АЛГЕБРА»

1 Найдите значение выражения $\frac{4,8 \cdot 1,2}{0,6}$.

Ответ: _____

2 В таблице приведены нормативы по прыжкам через скакалку за 20 с для учащихся 9 класса.

	Мальчики			Девочки		
Отметка	«5»	«4»	«3»	«5»	«4»	«3»
Количество раз	38	36	34	66	64	62

Какую отметку получит девочка, прыгнувшая 61 раз за 20 с?

1) Отметка «4» 2) Норматив не выполнен
3) Отметка «3» 4) Отметка «5»

Ответ: ☐

3 На координатной прямой точки A, B, C и D соответствуют числам: $-0,8069$; $-1,021$; $-1,01$; $-1,104$.

Какой точке соответствует число $-1,021$?

1) A 2) B 3) C 4) D

Ответ: ☐

4 Найдите значение выражения $\frac{180}{(2\sqrt{3})^2}$.

Ответ: _____

5 При работе фонарика напряжение в электрической цепи фонарика падает по мере разряжения аккумулятора. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси указано время работы фонарика (в часах), на вертикальной оси — напряжение (в вольтах). Определите с помощью графика, на сколько вольт упадёт напряжение за 6 ч работы фонарика.

Ответ: _____

59

6 Решите уравнение $(-12x+9)(-2x-5)=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

Ответ: _____

7 Группа стоит 150 р. за килограмм, а яблоки — 80 р. за килограмм. На сколько процентов группа дороже яблок?

Ответ: _____

8 На диаграмме представлено содержание питательных веществ в фасоли. Определите с помощью диаграммы, содержание каких веществ преобладает.

1) Белки 2) Углеводы
3) Жиры 4) Прочие*

В ответе запишите номер выбранного варианта ответа.

Ответ: _____

Белки
Жиры
Углеводы
Прочие*

*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

9 В каждой пачке хлопьев согласно условиям акции есть магнит. Магниты распределены по пачкам случайно. Оксана покупает пачку хлопьев в надежде получить магнит. Найдите вероятность того, что Оксана не найдёт магнит в своей пачке.

Ответ: _____

10 На рисунках изображены графики функций вида $y=ax^2+bx+c$. Установите соответствие между знаками коэффициентов a и c и графиками функций.

А) $a<0$, $c>0$ Б) $a>0$, $c>0$ В) $a>0$, $c<0$

1) 2) 3)

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В

11 Выписаны несколько последовательных членов арифметической прогрессии: ...; 11; x; 7; 5; ... Найдите x.

Ответ: _____

60

12 Найдите значение выражения $(x-2):\frac{x^2-6x+9}{2x+6}$ при $x=4,5$.

Ответ: _____

13 Чтобы перевести значения температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта, можно воспользоваться формулой $t_F=1,8t_C+32$, где t_C — температура (в градусах Цельсия), t_F — температура (в градусах Фаренгейта). С помощью этой формулы определите, сколькими градусами по шкале Фаренгейта соответствует −20 градусов по шкале Цельсия.

Ответ: _____

14 Укажите решение неравенства $81x^2 \geq 16$.

1) 2) 3) 4)

Ответ: ☐

МОДУЛЬ «ГЕОМЕТРИЯ»

15 План коридора, имеющий форму прямоугольника со сторонами 2 м и 10 м, планируют покрыть паркетом из прямоугольных дощечек со сторонами 6 см и 40 см. Определите, какое наименьшее количество таких дощечек понадобится.

Ответ: _____

16 В треугольнике ABC угол C прямой, $AB=20$, $\sin B=\frac{4}{15}$. Найдите AC.

Ответ: _____

17 На окружности отмечены точки A и B так, что меньшая дуга AB равна 122°. Прямая BC касается окружности в точке B, причём угол ABC острый. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____

18 Найдите тупой угол параллелограмма $ABCD$, если биссектриса угла A образует со стороной BC угол, равный 17°. Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____

61

19 На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите её большее основание.

Ответ: _____

20 Какое из следующих утверждений верно?

1) Центр окружности, описанной в треугольнике, может лежать вне этого треугольника.
2) Через заданную точку плоскости можно провести ровно одну прямую.
3) Диагонали любого ромба точкой пересечения делятся пополам.

В ответ запишите номер выбранного утверждения.

Ответ: _____

ЧАСТЬ 2

МОДУЛЬ «АЛГЕБРА»

21 Решите неравенство $(2-\sqrt{5}x-5)^2<(2-\sqrt{5}x)(x-5)$.

22 Первый велосипедист выехал из города по шоссе со скоростью 12 км/ч. Через час после него со скоростью 9 км/ч из того же города в том же направлении выехал второй велосипедист, а ещё через 2 ч — третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 4 ч после этого догнал первого.

23 Постройте график функции $y=|x^2+5x+6|+2$. Какое наибольшее число общих точек может иметь график данной функции с прямой, параллельной оси абсцисс?

МОДУЛЬ «ГЕОМЕТРИЯ»

24 Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке, лежащей на стороне BC. Найдите CD, если $AD=8$.

25 Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 7 и 63, $BD=$ Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

26 В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении 5 : 4, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC=24$.

62

Решения заданий части 2 в пособии «25 лучших вариантов от «Просвещения»

РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ ЧАСТИ 2

ВАРИАНТ 2

Часть 2

Модуль «Алгебра»

21 Решите уравнение $x^3 = x^2 + 2x^4$.

Решение. Перенесем уравнение в виде $2x^4 + x^2 - x^3 = 0$ и вынесем за скобки x^2. Получим $x^2(2x^2 + x - 1) = 0$, откуда $x^2 = 0$ (значит, $x = 0$) или $2x^2 + x - 1 = 0$. Корнями последнего уравнения являются числа -1 и $0{,}5$.

Ответ: -1; 0; $0{,}5$.

22 Самоходная баржа прошла против течения реки 26 км и, повернув обратно, прошла еще 44 км, затратив на весь путь 5 ч. Найдите собственную скорость самоходной баржи, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

Решение. Пусть собственная скорость баржи равна x км/ч, $x > 5$. Тогда при движении по течению ей скорость окажется равной $x + 5$ км/ч, а при движении против течения она будет равна $x - 5$ км/ч. Значит, время движения баржи по течению равно $\frac{44}{x+5}$ ч, а время движения против течения равно $\frac{26}{x-5}$.

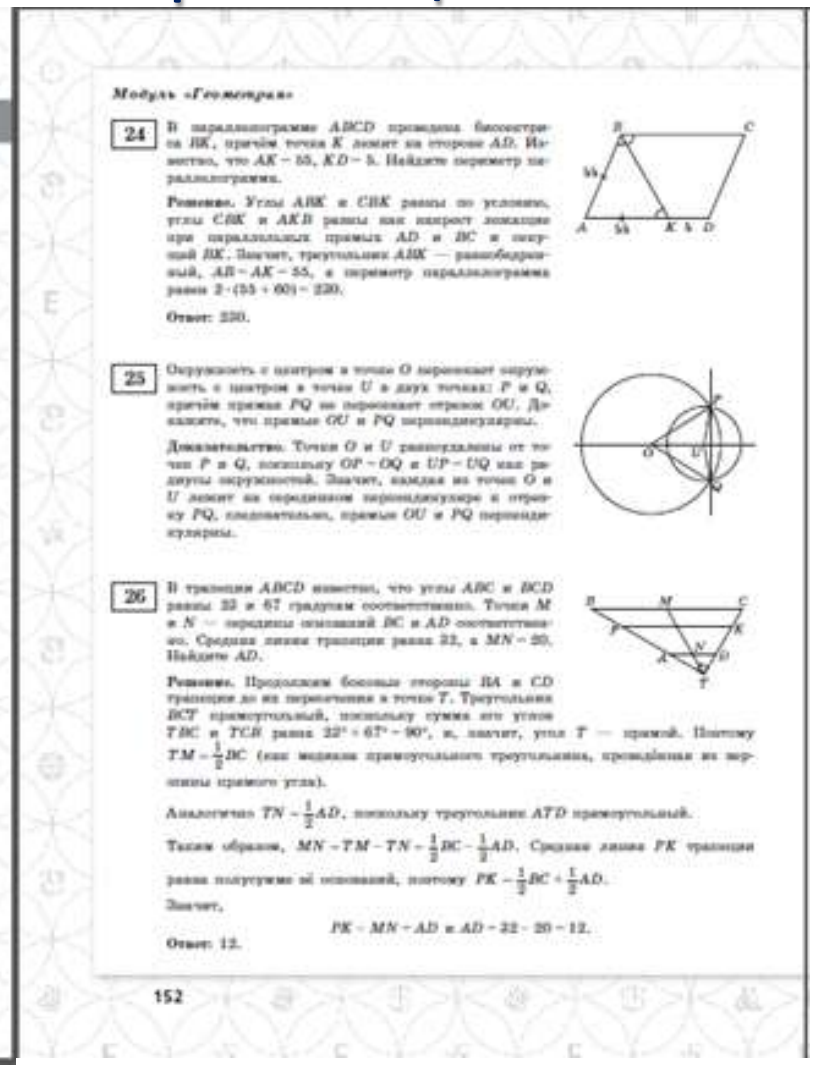
По условию задачи получим уравнение $\frac{26}{x-5} + \frac{44}{x+5} = 5$, откуда $26(x+5) + 44(x-5) = 5(x+5)(x-5)$. Раскроем скобки, перенесём все слагаемые в правую часть уравнения и приведём подобные. Получим $5x^2 - 80x - 85 = 0$. Разделив обе части последнего уравнения на число 5, придём к уравнению $x^2 - 16x - 17 = 0$. Корнями последнего уравнения являются числа -1 и 17, из которых только второе удовлетворяет условию $x > 5$.

Ответ: 17.

23 Постройте график функции $y = \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$ и определите, при каких значениях a прямая $y = a$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение. Область определения функции задаётся неравенством $x \neq -2$. Корнями квадратного трёхчлена $x^2 - x - 6$ являются числа -2 и 3, поэтому $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$. При условии $x \neq -2$ получим $\frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = \frac{(x + 2)(x - 3)}{x + 2} = x - 3$. Таким образом, $y = x - 3$, $x \neq -2$. Графиком функции является прямая $y = x - 3$ с выколотой точкой $(-2; -5)$. Прямая $y = a$ не имеет с графиком ни одной общей точки, только если $a = -5$. График изображён на рисунке.

Ответ: $a = -5$.



Модуль «Геометрия»

24 В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса BK, причём точка K лежит на стороне AD. Известно, что $AK = 55$, $KD = 5$. Найдите периметр параллелограмма.

Решение. Углы ABK и CBK равны по условию, углы CBK и AKB равны как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BK. Значит, треугольник ABK — равнобедренный, $AB = AK = 55$, а периметр параллелограмма равен $2 \cdot (55 + 60) = 230$.

Ответ: 230.

25 Окружность с центром в точке O пересекает окружность с центром в точке U в двух точках: P и Q, причём прямая PQ не пересекает отрезок OU. Докажите, что прямые OU и PQ перпендикулярны.

Доказательство. Точки O и U равноудалены от точек P и Q, поскольку $OP = OQ$ и $UP = UQ$ как радиусы окружностей. Значит, каждая из точек O и U лежит на серединном перпендикуляре к отрезку PQ, следовательно, прямые OU и PQ перпендикулярны.

26 В трапеции $ABCD$ известно, что углы ABC и BCD равны 23 и 67 градусам соответственно. Точки M и N — середины оснований BC и AD соответственно. Средняя линия трапеции равна 22, а $MN = 20$. Найдите AD.

Решение. Продолжим боковые стороны BA и CD трапеции до их пересечения в точке T. Треугольник BCT прямоугольный, поскольку сумма его углов TBC и TCB равна $23° + 67° = 90°$, и, значит, угол T — прямой. Поэтому $TM = \frac{1}{2}BC$ (как медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла).

Аналогично $TN = \frac{1}{2}AD$, поскольку треугольник ATD прямоугольный.

Таким образом, $MN = TM - TN = \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AD$. Средняя линия PK трапеции равна полусумме её оснований, поэтому $PK = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AD$.

Значит,

$$PK = MN + AD \text{ и } AD = 22 - 20 = 12.$$

Ответ: 12.

Модульный курс «Я сдам ОГЭ!»

Курс «Я сдам ОГЭ!» включает учебные пособия **«Курс самоподготовки. Технология решения заданий»** и **«Типовые задания».**

Учебное пособие «Типовые задания» предназначено для подготовки обучающихся 8—9 классов к государственной итоговой аттестации. Оно посвящено практической отработке навыков решения задач, выполнения типовых экзаменационных заданий.

Для удобства подготовки и выстраивания индивидуальных образовательных траекторий материал пособия разбит на отдельные темы и позволяет познакомиться со всеми типами заданий ОГЭ по математике.

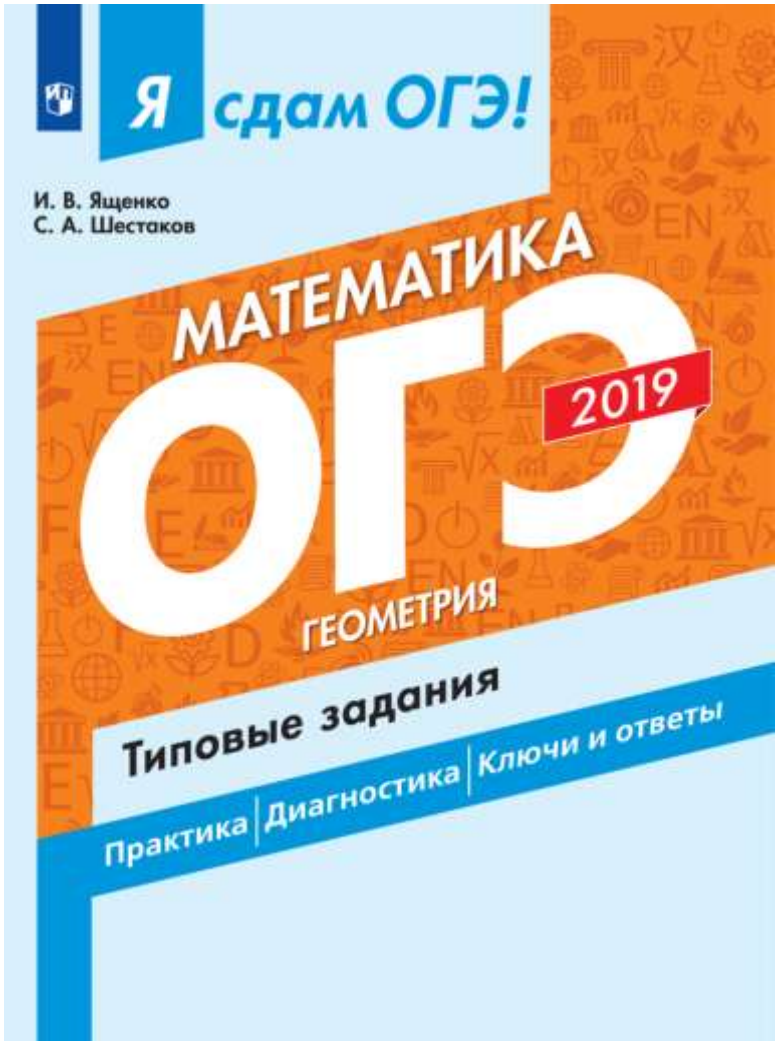
Состав курса:

Курс самоподготовки. Технология решения заданий.

Типовые задания. Часть 1. Алгебра.

Типовые задания. Часть 2. Геометрия.

Я сдам ОГЭ. Математика. Модульный курс. 7-9 классы

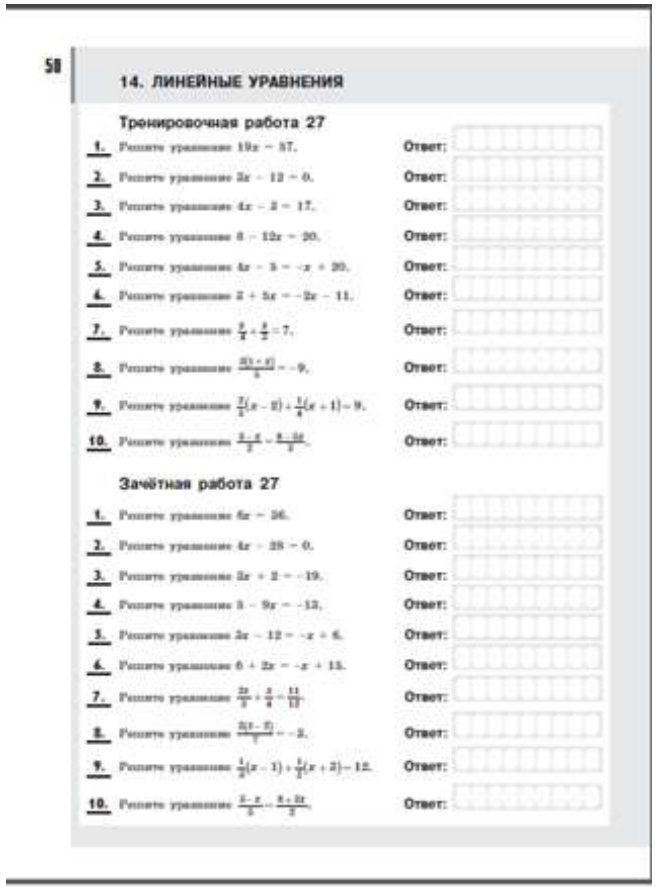


Особенности пособий серии «Я сдам ОГЭ!»:

- могут использоваться в учебном процессе в сочетании с любым основным УМК;
- модульная структура курса позволяет выстраивать индивидуальные образовательные траектории учащихся и организовывать групповую работу;
- основная часть заданий аналогична реальным заданиям ОГЭ по математике и адаптирована под их формат;
- задания каждого модуля делятся на сдвоенные уроки по различным темам и наряду с основным блоком задач содержат задачи на повторение по другим темам;
- систематические занятия по пособию (даже в случае существенных пробелов в знаниях при начале работы с ним) дают возможность сформировать устойчивые навыки решения основных типов задач, необходимых для применения в реальных жизненных ситуациях и успешной сдачи ОГЭ по математике с целью продолжения образования.

Типовые задания «Я сдам ОГЭ!»

Для удобства подготовки и выстраивания индивидуальных образовательных траекторий материал пособия разбит на отдельные темы и позволяет познакомиться со всеми типами заданий ОГЭ по математике.



58

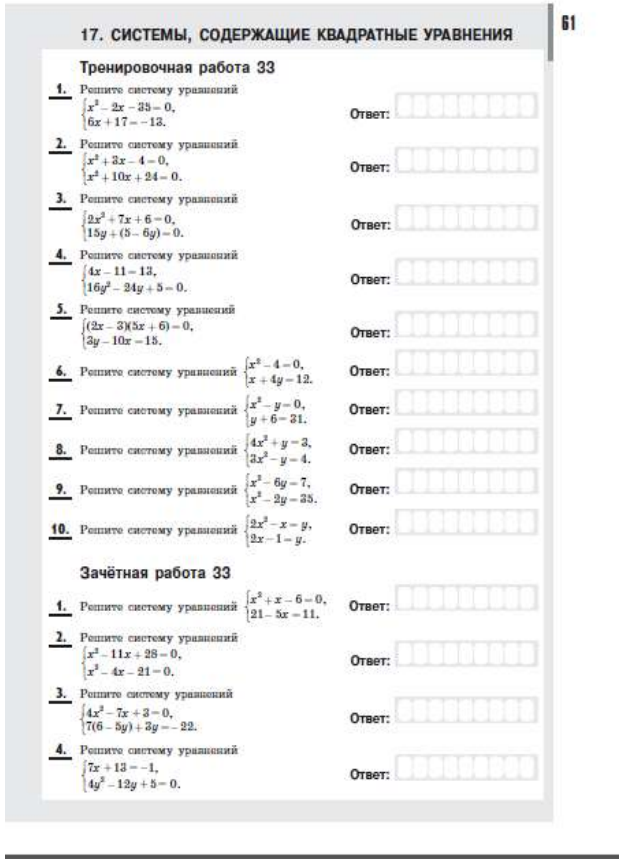
14. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Тренировочная работа 27

1. Решите уравнение $19x = 57$. Ответ:
2. Решите уравнение $3x - 12 = 0$. Ответ:
3. Решите уравнение $4x - 3 = 17$. Ответ:
4. Решите уравнение $8 - 12x = 20$. Ответ:
5. Решите уравнение $4x - 5 = -x + 20$. Ответ:
6. Решите уравнение $2 + 5x = -2x - 11$. Ответ:
7. Решите уравнение $\frac{x}{4} + \frac{x}{2} = 7$. Ответ:
8. Решите уравнение $\frac{3(x+2)}{5} = -9$. Ответ:
9. Решите уравнение $\frac{2}{3}(x-2) + \frac{1}{4}(x+1) = 9$. Ответ:
10. Решите уравнение $\frac{3-x}{2} = \frac{8+3x}{3}$. Ответ:

Зачётная работа 27

1. Решите уравнение $6x = 36$. Ответ:
2. Решите уравнение $4x - 28 = 0$. Ответ:
3. Решите уравнение $3x + 2 = -19$. Ответ:
4. Решите уравнение $5 - 9x = -13$. Ответ:
5. Решите уравнение $3x - 12 = -x + 6$. Ответ:
6. Решите уравнение $6 + 2x = -x + 15$. Ответ:
7. Решите уравнение $\frac{2x}{3} + \frac{3}{4} = \frac{11}{12}$. Ответ:
8. Решите уравнение $\frac{3(x-2)}{7} = -3$. Ответ:
9. Решите уравнение $\frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{2}(x+2) = 12$. Ответ:
10. Решите уравнение $\frac{3-x}{5} = \frac{8+3x}{2}$. Ответ:



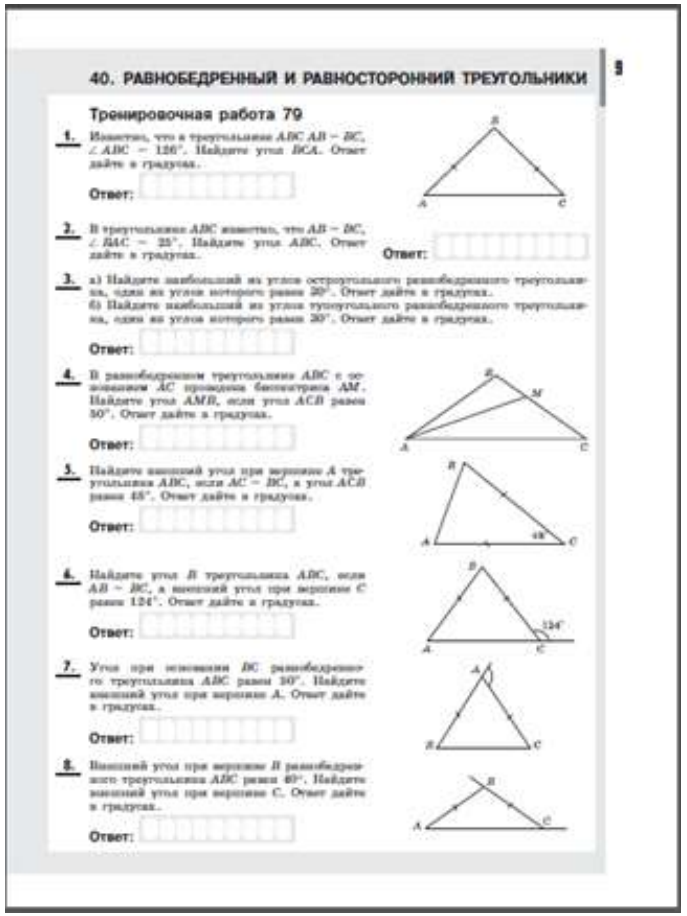
17. СИСТЕМЫ, СОДЕРЖАЩИЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ 61

Тренировочная работа 33

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 2x - 35 = 0, \\ 6x + 17 = -13. \end{cases}$ Ответ:
2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 = 0, \\ x^2 + 10x + 24 = 0. \end{cases}$ Ответ:
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 + 7x + 6 = 0, \\ 15y + (5 - 6y) = 0. \end{cases}$ Ответ:
4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x - 11 = 13, \\ 16y^2 - 24y + 5 = 0. \end{cases}$ Ответ:
5. Решите систему уравнений $\begin{cases} (2x - 3)(5x + 6) = 0, \\ 3y - 10x = 15. \end{cases}$ Ответ:
6. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x + 4y = 12. \end{cases}$ Ответ:
7. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y + 6 = 31. \end{cases}$ Ответ:
8. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x^2 + y = 3, \\ 3x^2 - y = 4. \end{cases}$ Ответ:
9. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 6y = 7, \\ x^2 - 2y = 35. \end{cases}$ Ответ:
10. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 - x = y, \\ 2x - 1 = y. \end{cases}$ Ответ:

Зачётная работа 33

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ 21 - 5x = 11. \end{cases}$ Ответ:
2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 11x + 28 = 0, \\ x^2 - 4x - 21 = 0. \end{cases}$ Ответ:
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x^2 - 7x + 3 = 0, \\ 7(6 - 5y) + 3y = -22. \end{cases}$ Ответ:
4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 7x + 13 = -1, \\ 4y^2 - 12y + 5 = 0. \end{cases}$ Ответ:



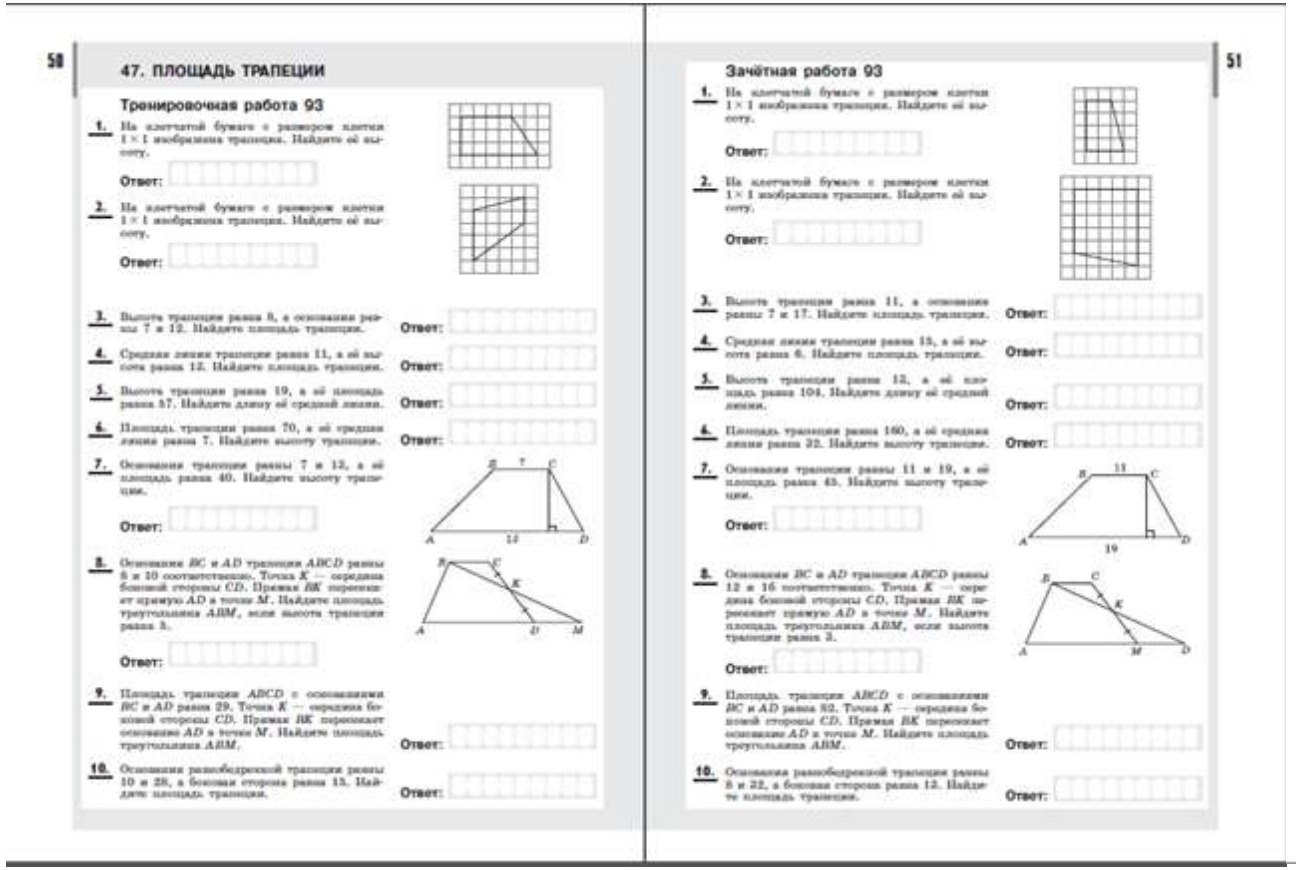
40. РАВНОБЕДРЕННЫЙ И РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИКИ 9

Тренировочная работа 79

1. Известно, что в треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle ABC = 126°$. Найдите угол BCA. Ответ дайте в градусах. Ответ:
2. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $\angle BAC = 25°$. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах. Ответ:
3. а) Найдите наибольший из углов остроугольного равнобедренного треугольника, один из углов которого равен 30°. Ответ дайте в градусах.
б) Найдите наибольший из углов тупоугольного равнобедренного треугольника, один из углов которого равен 30°. Ответ дайте в градусах.
Ответ:
4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AM. Найдите угол AMB, если угол ACB равен 50°. Ответ дайте в градусах. Ответ:
5. Найдите внешний угол при вершине A треугольника ABC, если $AC = BC$, а угол ACB равен 48°. Ответ дайте в градусах. Ответ:
6. Найдите угол B треугольника ABC, если $AB = BC$, а внешний угол при вершине C равен 124°. Ответ дайте в градусах. Ответ:
7. Угол при основании BC равнобедренного треугольника ABC равен 50°. Найдите внешний угол при вершине A. Ответ дайте в градусах. Ответ:
8. Внешний угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC равен 60°. Найдите внешний угол при вершине C. Ответ дайте в градусах. Ответ:

Виды работ в пособии «Типовые задания»

Для качественной подготовки пособие содержит разные виды работ: тренировочные работы, зачётные работы, задачи на повторение, диагностические работы.



58

47. ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ

Тренировочная работа 93

1. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите её высоту.

Ответ:

2. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите её высоту.

Ответ:

3. Высота трапеции равна 8, а основания равны 7 и 12. Найдите площадь трапеции. Ответ:

4. Средняя линия трапеции равна 11, а её высота равна 12. Найдите площадь трапеции. Ответ:

5. Высота трапеции равна 19, а её площадь равна 57. Найдите длину её средней линии. Ответ:

6. Площадь трапеции равна 70, а её средняя линия равна 7. Найдите высоту трапеции. Ответ:

7. Основания трапеции равны 7 и 12, а её площадь равна 40. Найдите высоту трапеции.

Ответ:

8. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны 8 и 10 соответственно. Точка K — середина боковой стороны CD. Прямая BK пересекает прямую AD в точке M. Найдите площадь треугольника ABM, если высота трапеции равна 3.

Ответ:

9. Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD равна 29. Точка K — середина боковой стороны CD. Прямая BK пересекает основание AD в точке M. Найдите площадь треугольника ABM. Ответ:

10. Основания равнобедренной трапеции равны 10 и 28, а боковая сторона равна 13. Найдите площадь трапеции. Ответ:

51

Зачётная работа 93

1. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите её высоту.

Ответ:

2. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите её высоту.

Ответ:

3. Высота трапеции равна 11, а основания равны 7 и 17. Найдите площадь трапеции. Ответ:

4. Средняя линия трапеции равна 15, а её высота равна 6. Найдите площадь трапеции. Ответ:

5. Высота трапеции равна 12, а её площадь равна 104. Найдите длину её средней линии. Ответ:

6. Площадь трапеции равна 160, а её средняя линия равна 32. Найдите высоту трапеции. Ответ:

7. Основания трапеции равны 11 и 19, а её площадь равна 45. Найдите высоту трапеции.

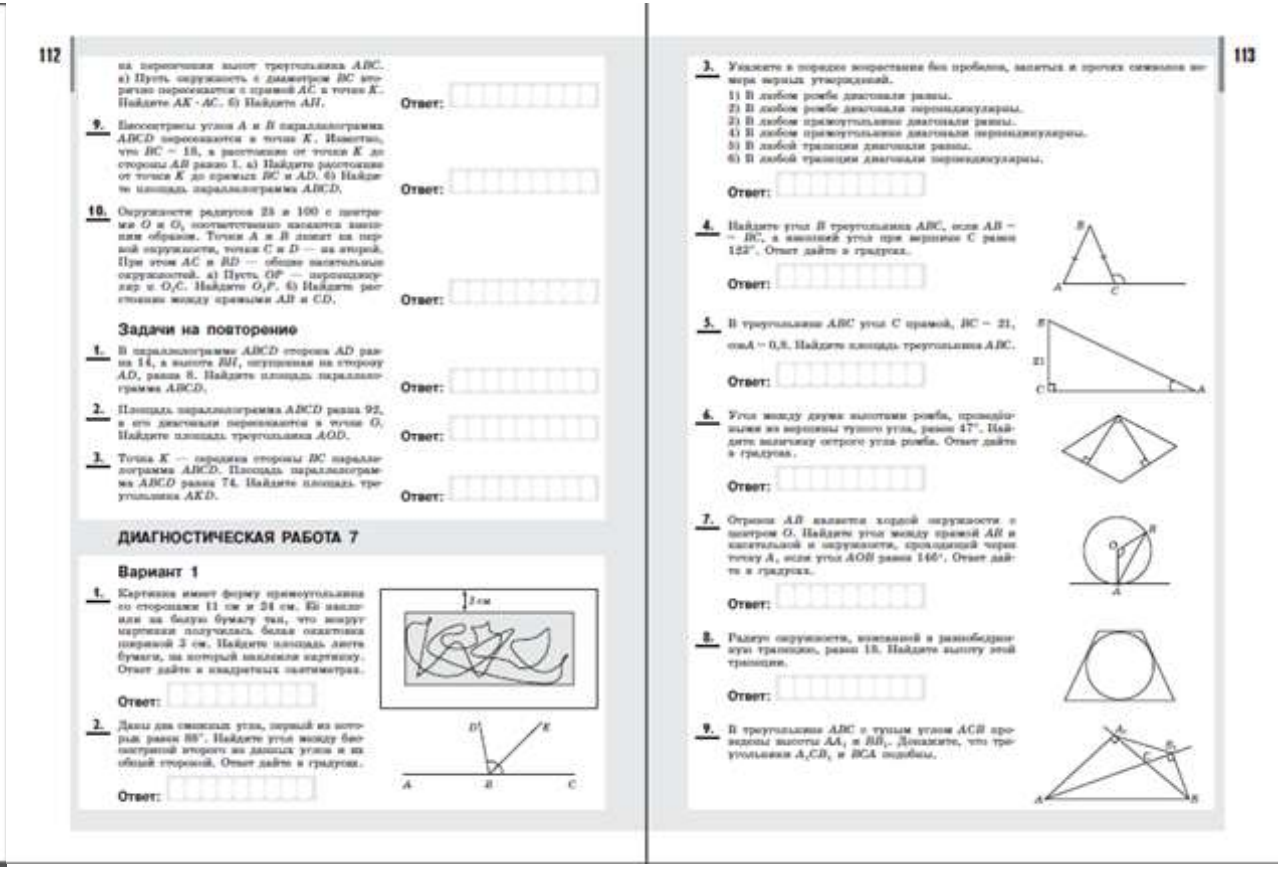
Ответ:

8. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны 12 и 16 соответственно. Точка K — середина боковой стороны CD. Прямая BK пересекает прямую AD в точке M. Найдите площадь треугольника ABM, если высота трапеции равна 3.

Ответ:

9. Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD равна 52. Точка K — середина боковой стороны CD. Прямая BK пересекает основание AD в точке M. Найдите площадь треугольника ABM. Ответ:

10. Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 22, а боковая сторона равна 12. Найдите площадь трапеции. Ответ:



112

на перпендикуле высот треугольника ABC. а) Пусть окружность с диаметром BC вторично пересекается с прямой AC в точке K. Найдите $AK \cdot AC$. б) Найдите AH. Ответ:

9. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Известно, что $BC = 18$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 1. а) Найдите расстояние от точки K до прямых BC и AD. б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$. Ответ:

10. Окружности радиусов 25 и 100 с центрами O и O_1 соответственно касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D — на второй. При этом AC и BD — общие касательные окружностей. а) Пусть OP — перпендикуляр к O_1C. Найдите O_1P. б) Найдите расстояние между прямыми AB и CD. Ответ:

Задачи на повторение

1. В параллелограмме $ABCD$ сторона AD равна 14, а высота BH, опущенная на сторону AD, равна 8. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$. Ответ:

2. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 92, а его диагонали пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника AOD. Ответ:

3. Точка K — середина стороны BC параллелограмма $ABCD$. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 74. Найдите площадь треугольника AKD. Ответ:

ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ РАБОТА 7

Вариант 1

1. Картинка имеет форму прямоугольника со сторонами 11 см и 24 см. Её наклеили на белую бумагу так, что вокруг картинки получилась белая окантовка шириной 3 см. Найдите площадь листа бумаги, на который наклеили картинку. Ответ дайте в квадратных сантиметрах. Ответ:

2. Даны два смежных угла, первый из которых равен 88°. Найдите угол между биссектрисой второго из данных углов и их общей стороной. Ответ дайте в градусах. Ответ:

113

3. Укажите в порядке возрастания без пробелов, запятых и прочих символов номера верных утверждений.
1) В любом ромбе диагонали равны.
2) В любом ромбе диагонали перпендикулярны.
3) В любом прямоугольнике диагонали равны.
4) В любом прямоугольнике диагонали перпендикулярны.
5) В любой трапеции диагонали равны.
6) В любой трапеции диагонали перпендикулярны.

Ответ:

4. Найдите угол B треугольника ABC, если $AB = BC$, а внешний угол при вершине C равен 122°. Ответ дайте в градусах. Ответ:

5. В треугольнике ABC угол C прямой, $BC = 21$, $\cos A = 0{,}8$. Найдите площадь треугольника ABC. Ответ:

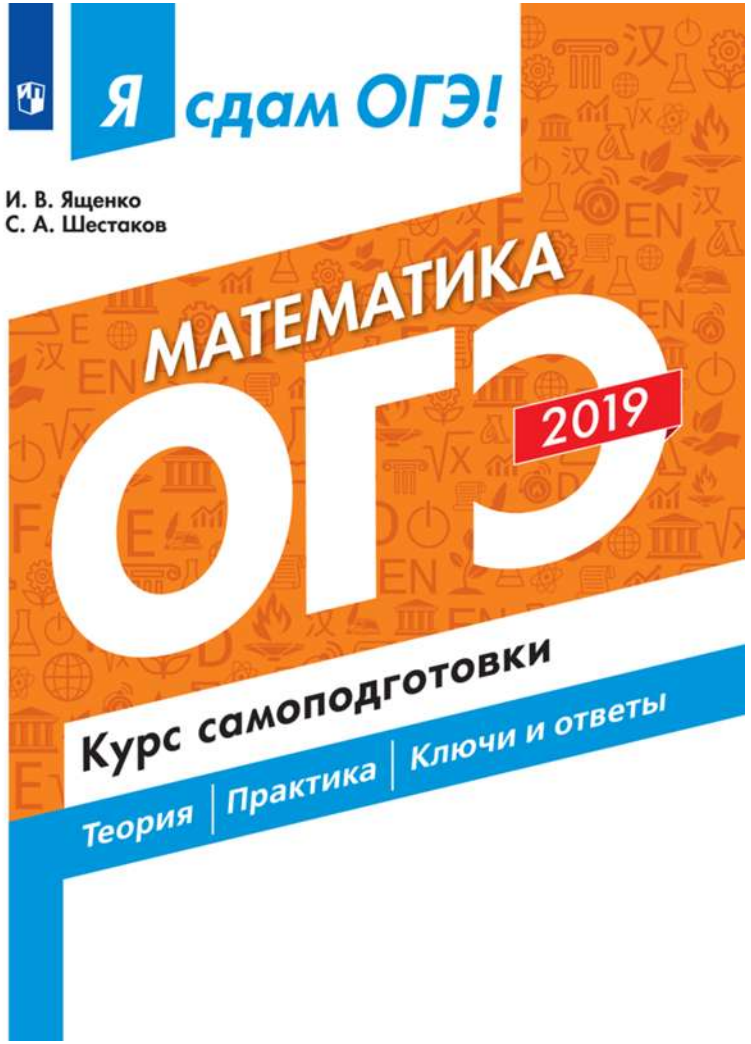
6. Угол между двумя высотами ромба, проведёнными из вершины тупого угла, равен 47°. Найдите величину острого угла ромба. Ответ дайте в градусах. Ответ:

7. Отрезок AB является хордой окружности с центром O. Найдите угол между прямой AB и касательной к окружности, проходящей через точку A, если угол AOB равен 146°. Ответ дайте в градусах. Ответ:

8. Радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, равна 18. Найдите высоту этой трапеции. Ответ:

9. В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что треугольники A_1CB_1 и BCA подобны.

Курс самоподготовки «Я сдам ОГЭ!»



СОДЕРЖАНИЕ 127

Предисловие 3

МОДУЛЬ «ЗАДАЧИ С ПРАКТИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ»

Темы занятий 4
Общие рекомендации к занятиям . . . . . —
Занятие 1. Чтение и анализ данных, представленных в виде таблиц . . . . . —
Занятие 2. Чтение и анализ данных, представленных в виде графиков 7
Занятие 3. Чтение и анализ данных, представленных в виде диаграмм 10
Занятие 4. Перевод (полагаясь на) единиц измерений, сравнение величин, приведение в порядок соответствия между величинами и их значениями, запись чисел в стандартном виде 12
Занятие 5. Практические задачи на вычисления по данным формулам 12
Занятие 6. Практические арифметические задачи с текстовым условием 14
Занятие 7. Практические арифметические задачи с текстовым условием на проценты, части, доли 15
Занятие 8. Понятие вероятности. Практические задачи на вычисление вероятностей 17

МОДУЛЬ «АЛГЕБРА»

1. Вычисления и преобразования

Темы занятий 20
Общие рекомендации к занятиям . . . . . —
Занятие 9. Арифметические действия с целыми числами . . . . . —
Занятие 10. Арифметические действия с обыкновенными дробями 21
Занятие 11. Арифметические действия с десятичными дробями 22
Занятие 12. Арифметические действия с комбинациями десятичных и обыкновенных дробей 23
Занятие 13. Арифметические действия с натуральными степенями 24
Занятие 14. Арифметические действия с целыми степенями 25
Занятие 15. Арифметические действия с корнями 25
Занятие 16. Изображение чисел на числовой прямой, сравнение и оценка 27
Занятие 17. Формулы сокращенного умножения. Преобразования целых алгебраических выражений 28
Занятие 18. Преобразования дробно-рациональных алгебраических выражений 28
Занятие 19. Преобразования иррациональных алгебраических выражений 29
Занятие 20. Числовые последовательности. Арифметическая прогрессия 30
Занятие 21. Числовые последовательности. Геометрическая прогрессия 32

2. Уравнения и системы уравнений

Темы занятий 34
Общие рекомендации к занятиям . . . . . —
Занятие 22. Линейные уравнения 38
Занятие 23. Системы линейных уравнений 39
Занятие 24. Квадратные уравнения 41
Занятие 25. Системы, содержащие квадратные уравнения 42
Занятие 26. Дробно-рациональные уравнения 44
Занятие 27. Системы, содержащие дробно-рациональные уравнения . . . . . —
Занятие 28*. Более сложные уравнения и системы уравнений 45

3. Текстовые задачи

Темы занятий 50
Общие рекомендации к занятиям . . . . . —
Занятие 29. Задачи на движение. Совместное движение . . . . . —
Занятие 30. Задачи на движение. Движение по воде 52
Занятие 31. Задачи на движение. Движение протяженных тел. Средняя скорость . . . . . —
Занятие 32. Задачи на производительность 52

128

Занятие 33. Задачи на концентрацию, планы, смеси 55

4. Неравенства и системы неравенств

Темы занятий 58
Общие рекомендации к занятиям . . . . . —
Занятие 34*. Общие сведения о неравенствах. Метод интервалов . . . . . —
Занятие 35. Линейные неравенства 66
Занятие 36. Системы линейных неравенств 67
Занятие 37. Квадратные неравенства 69
Занятие 38. Системы, содержащие квадратные неравенства 72
Занятие 39. Простейшие дробно-рациональные неравенства 74
Занятие 40. Системы, содержащие простейшие дробно-рациональные неравенства 75
Занятие 41*. Более сложные рациональные неравенства 76

5. Функции и график функции

Темы занятий 84
Общие рекомендации к занятиям . . . . . —
Занятие 42. Функция. График функции. Возрастание, убывание, точки максимума, минимума, наибольшее, наименьшее значения функции. Чтение графиков функций . . . . . —
Занятие 43. График линейной функции 85
Занятие 44. График квадратичной функции. Парабола 88
Занятие 45. График обратной пропорциональности. Гипербола 91
Занятие 46*. Графики более сложных функций 92

III. МОДУЛЬ «ГЕОМЕТРИЯ»

1. Треугольники и многоугольники

Темы занятий 96
Общие рекомендации к занятиям . . . . . —
Занятие 47. Прямые, отрезки, углы . . . . . —
Занятие 48. Равнобедренный и равносторонний треугольники 97
Занятие 49. Прямоугольный треугольник 98
Занятие 50. Произвольный треугольник 99
Занятие 51. Площадь треугольника 100
Занятие 52. Параллелограмм. Площадь параллелограмма 102
Занятие 53. Прямоугольник, квадрат, ромб, их площади 103
Занятие 54. Трапеция 105
Занятие 55. Площадь трапеции 106

2. Окружности и координаты

Темы занятий 107
Общие рекомендации к занятиям . . . . . —
Занятие 56. Окружность и круг. Длина окружности и площадь круга . . . . . —
Занятие 57. Углы, связанные с окружностью. Взаимное расположение окружностей 108
Занятие 58. Окружность, вписанная в треугольник 109
Занятие 59. Окружность, описанная около треугольника 110
Занятие 60. Окружность, вписанная в четырёхугольник 111
Занятие 61. Окружность, описанная около четырёхугольника . . . . . —
Занятие 62. Геометрия на клетчатой бумаге 112
Занятие 63. Выбор верного утверждения 115
Занятие 64. Практические и прикладные задачи по планиметрии на ОГЭ по математике 116
Занятие 65. Задачи на доказательство. Более сложные задачи 117

Итоговая диагностика 119

Курс самоподготовки «Я сдам ОГЭ!»

1. ТРЕУГОЛЬНИКИ И МНОГОУГОЛЬНИКИ

ТЕМЫ ЗАНЯТИЙ

Занятие 47. Прямые, отрезки, углы.
Занятие 48. Равнобедренный и равносторонний треугольники.
Занятие 49. Прямоугольный треугольник.
Занятие 50. Произвольный треугольник.
Занятие 51. Формулы площади треугольника.
Занятие 52. Параллелограмм. Площадь параллелограмма.
Занятие 53. Прямоугольник, квадрат, ромб, их площади.
Занятие 54. Трапеция.
Занятие 55. Площадь трапеции.

Общие рекомендации к занятиям

Задачи по планиметрии с кратким ответом и с развёрнутым ответом (полным решением) встречаются в вариантах ОГЭ по математике среди задач как базового, так и повышенного и высокого уровня сложности.

Задачи с кратким ответом представляют собой достаточно традиционные несложные задачи на вычисление углов, расстояний, длин и площадей плоских фигур, в том числе по готовому чертежу, в некоторых случаях сделанному на бумаге в клетку или в прямоугольной системе координат (с указанием координат данных точек в условии или на чертеже). Задачи с развёрнутым ответом (полным решением) требуют уверенного владения материалом школьной программы по геометрии и умения применять изученные теоремы в более сложных случаях.

Занятие 47. Прямые, отрезки, углы

Первое занятие этого модуля посвящено повторению начальных сведений по геометрии. Для решения приведённых здесь задач достаточно представления о том, что такое отрезок и угол, какие прямые называются параллельными, какие — перпендикулярными, какие углы называются вертикальными, какие — смежными, как называются пары углов, которые образуются при пересечении двух параллельных прямых третьей. Помимо этих понятий, потребуется знание основных фактов, связанных с перечисленными углами:

- сумма смежных углов равна 180°;
- вертикальные углы равны;
- соответственные углы равны;
- накрест лежащие углы равны;
- сумма односторонних углов равна 180°;
- сумма углов треугольника равна 180°.

Пример 1. На рисунке 66 изображены параллельные прямые FE, MN и секущая AB, пересекающая FE в точке C, а MN в точке D. Выполните следующие задания:

а) Установите соответствие между парами углов и их названиями.

В таблице под каждой буквой укажите номер соответствующего названия.

Пара углов	Название
А) ACF и DCE	1) Смежные
Б) FCD и CDM	2) Вертикальные
В) ACF и ACE	3) Односторонние
Г) DCF и NDC	4) Соответственные
Д) ACF и CDM	5) Накрест лежащие

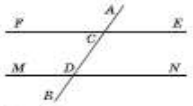


Рис. 66

б) Найдите величину угла CDM, если известно, что она вдвое больше величины угла NDC.

в) Найдите величину угла между биссектрисами углов CDM и NDC.

г) Найдите величину угла между биссектрисами углов FCD и CDM.

Решение. а) Углы ACF и DCE являются вертикальными, углы FCD и CDM — односторонними, углы ACF и ACE — смежными, углы DCF и NDC — накрест лежащими, углы ACF и CDM — соответственными. Поэтому таблицу нужно заполнить так:

А	Б	В	Г	Д
2	3	1	5	4

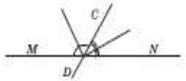


Рис. 67

б) Углы CDM и NDC являются смежными, поэтому их сумма равна 180°. Из условия следует, что $3\angle NDC = 180°$, откуда $\angle NDC = 60°$, и, значит, $\angle CDM = 120°$.

в) Угол между биссектрисами углов CDM и NDC равен сумме половин этих углов. Поскольку сумма двух смежных углов равна 180°, то сумма половин этих углов будет равна 90° (рис. 67).

г) Сумма односторонних углов FCD и CDM равна 180°, а сумма половин этих углов будет равна 90°. То есть если биссектрисы этих углов пересекаются в точке P, то сумма углов PDC и PCD будет равна 90°, поэтому и искомый угол CPD будет равен 90° (рис. 68).

Ответ: а) 23 154; б) 120; в) 90; г) 90.

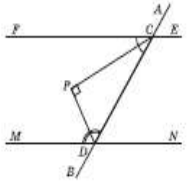


Рис. 68

Пример 2. На отрезке AB отмечена точка M, а на отрезке AM — точка P. Найдите длину отрезка AB, если $AM = 7$, $PM = 3$, $PB = 10$.

Решение. Поскольку $AM = 7$, $PM = 3$, то $AP = 4$. Поскольку $PB = 10$, $PM = 3$, то $MB = 7$ (рис. 69). Значит, $AB = AP + PM + MB = 4 + 3 + 7 = 14$.

Ответ: 14.

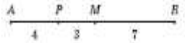


Рис. 69

Пример 3. На отрезке AB отмечена точка M, а на отрезке AM — точка P. Найдите отношение длины отрезка AP к длине отрезка PB, если $AP : PM = 3 : 2$, $PM : MB = 3 : 7$.

Решение. В каждом из двух данных отношений участвует отрезок PM. Выберем обозначение для его длины так, чтобы она была кратна и 2, и 3, т. е. положим $PM = 6x$. Тогда из условия задачи следует, что $AP = 9x$, $MB = 14x$ (рис. 70). Поэтому $AP : PB = 9x : 20x = 0{,}45$.

Ответ: 0,45.

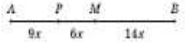


Рис. 70

Занятие 48. Равнобедренный и равносторонний треугольники

Напомним основные факты, связанные с треугольниками:

- сумма углов треугольника равна 180°;
- внешний угол треугольника равен сумме двух не смежных с ним внутренних углов треугольника;
- высоты треугольника пересекаются в одной точке;
- биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является центром вписанной в треугольник окружности);
- серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является центром описанной около треугольника окружности);
- медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся его в отношении 2 : 1, считая от вершин треугольника;
- средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна её половине.

Важным частным случаем треугольника является равнобедренный треугольник, которому и посвящены два этих урока. В таком треугольнике углы при основании равны, а высота, проведённая к основанию, является медианой и биссектрисой, поэтому на ней и находятся центры вписанной и описанной окружностей.

Частный случай равнобедренного треугольника — равносторонний треугольник. В нём каждая высота является медианой и биссектрисой, поэтому центры вписанной и описанной окружностей совпадают и $R = 2r$.

Некоторые задания по планиметрии ОГЭ и КГЭ по математике представляют собой задачи на вычисление длин, площадей и углов по данным чертежам на клетчатой бумаге (сетке). Бумага в клетку играет в данном случае роль своего рода «помощника условия», позволяя найти длины отрезков, расположенных на линиях сетки, а затем с их помощью вычислить, например, длины других отрезков или площади плоских фигур.

Пример 1. Найдите угол C треугольника ABC, если $AB = BC$, а внешний угол при вершине B равен 56°. Ответ дайте в градусах.

Решение. Внешний угол треугольника равен сумме внутренних, не смежных с ним углов. Поэтому сумма углов при основании данного равнобедренного треугольника равна 56°, а каждый из них равен половине этой величины, т. е. 28°.

Ответ: 28.

Пример 2. Найдите периметр равностороннего треугольника, если одна из его средних линий равна 6 см. Ответ дайте в сантиметрах.

Решение. Поскольку все стороны равностороннего треугольника равны и каждая из них вдвое больше его средней линии, то длина стороны данного равностороннего треугольника будет равна 12 см, а его периметр — 36 см.

Ответ: 36.

Пример 3. Найдите высоту равнобедренного треугольника, проведённую к его основанию, если боковые стороны треугольника равны 5 см, а основание равно 6 см. Ответ дайте в сантиметрах.

Решение. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к его основанию, является его медианой и, следовательно, делит основание пополам (рис. 71). Поэтому длину высоты можно найти как длину катета прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 5, а второй катет равен 3. Получим, что искомая длина равна $\sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$.

Ответ: 4.

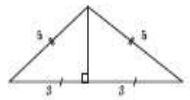
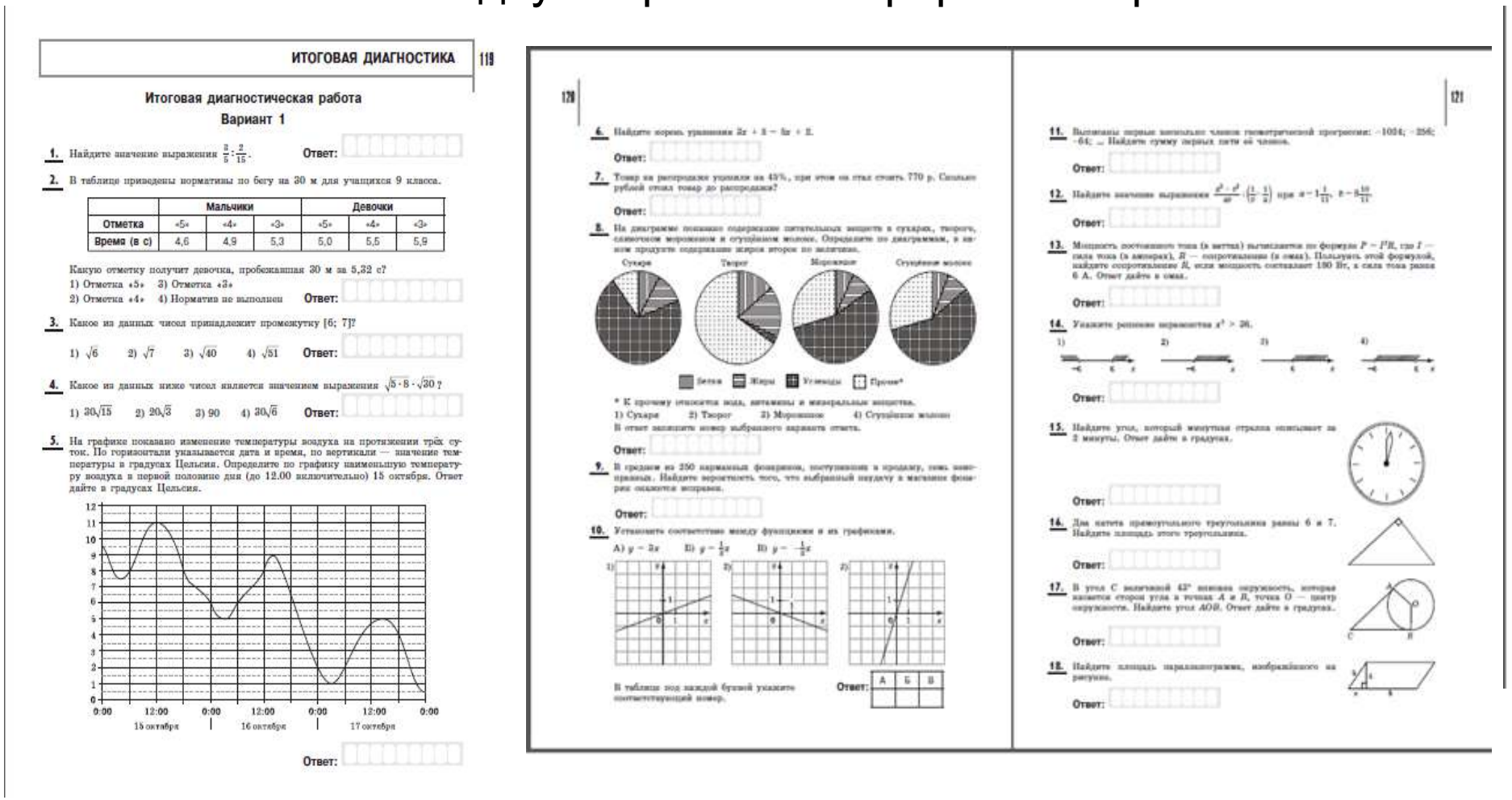


Рис. 71

Курс самоподготовки «Я сдам ОГЭ!»

Для итогового контроля в конце пособия приводится диагностическая работа в двух вариантах в формате варианта ОГЭ.



ИТОГОВАЯ ДИАГНОСТИКА 119

Итоговая диагностическая работа

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $\frac{3}{5}:\frac{2}{15}$. Ответ:

2. В таблице приведены нормативы по бегу на 30 м для учащихся 9 класса.

	Мальчики			Девочки		
Отметка	«5»	«4»	«3»	«5»	«4»	«3»
Время (в с)	4,6	4,9	5,3	5,0	5,5	5,9

Какую отметку получит девочка, пробежавшая 30 м за 5,32 с?

1) Отметка «5» 3) Отметка «3»
2) Отметка «4» 4) Норматив не выполнен Ответ:

3. Какое из данных чисел принадлежит промежутку [6; 7]?

1) $\sqrt{6}$ 2) $\sqrt{7}$ 3) $\sqrt{40}$ 4) $\sqrt{51}$ Ответ:

4. Какое из данных ниже чисел является значением выражения $\sqrt{5\cdot 8}\cdot\sqrt{30}$?

1) $30\sqrt{15}$ 2) $20\sqrt{3}$ 3) 90 4) $30\sqrt{6}$ Ответ:

5. На графике показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по графику наименьшую температуру воздуха в первой половине дня (до 12.00 включительно) 15 октября. Ответ дайте в градусах Цельсия.

Ответ:

120

6. Найдите корень уравнения $3x+2=4x+2$.

Ответ:

7. Товар на распродаже уценили на 45%, при этом он стал стоить 770 р. Сколько рублей стоил товар до распродажи?

Ответ:

8. На диаграмме показано содержание питательных веществ в сухарях, творогу, сливочном мороженом и сгущённом молоке. Определите по диаграммам, в каком продукте содержание жиров второе по величине.

Сухари Творог Мороженое Сгущённое молоко

Белки Жиры Углеводы Прочие*

* К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

1) Сухари 2) Творог 3) Мороженое 4) Сгущённое молоко

В ответ запишите номер выбранного варианта ответа.

Ответ:

9. В среднем из 250 карманных фонариков, поступающих в продажу, семь неисправны. Найдите вероятность того, что выбранный наугад в магазине фонарик окажется исправен.

Ответ:

10. Установите соответствие между функциями и их графиками.

А) $y=2x$ Б) $y=\frac{1}{2}x$ В) $y=-\frac{1}{2}x$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В

121

11. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии: −1024; −256; −64; ... Найдите сумму первых пяти её членов.

Ответ:

12. Найдите значение выражения $\frac{p^8\cdot p^6}{q^{10}}\cdot\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{q}\right)$ при $q=1\frac{1}{11}$, $p=8\frac{10}{11}$.

Ответ:

13. Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле $P=I^2R$, где I — сила тока (в амперах), R — сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите сопротивление R, если мощность составляет 180 Вт, а сила тока равна 6 А. Ответ дайте в омах.

Ответ:

14. Укажите решение неравенства $x^2>26$.

1) 2) 3) 4)

Ответ:

15. Найдите угол, который минутная стрелка описывает за 2 минуты. Ответ дайте в градусах.

Ответ:

16. Два катета прямоугольного треугольника равны 6 и 7. Найдите площадь этого треугольника.

Ответ:

17. В угол C величиной 42° вписана окружность, которая касается сторон угла в точках A и B, точка O — центр окружности. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

Ответ:

18. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.

Ответ:

122

19. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите длину её средней линии.

Ответ:

20. Какие из следующих утверждений верны?

1) Треугольника со сторонами 2 см, 3 см и 6 см не существует.
2) Площадь трапеции равна произведению большего основания трапеции на высоту.
3) Все диаметры окружности равны между собой.

В ответ запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ:

21. Решите систему уравнений $\begin{cases}3x^2+y=6,\\4x^2-y=1.\end{cases}$ Ответ:

22. Первый рабочий за час делает на 5 деталей больше, чем второй, и выполняет заказ, состоящий из 180 деталей, на 2 ч быстрее, чем второй рабочий, выполняющий такой же заказ. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

Ответ:

23. Постройте график функции $\begin{cases}-x^2-4x+1 & \text{при } x\geq -2,\\ -x+1 & \text{при } x<-2.\end{cases}$ Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ:

24. Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK, если $BH=15$.

Ответ:

25. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равны. Докажите, что диагонали этого четырёхугольника взаимно перпендикулярны.

26. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CP. Радиус окружности, вписанной в треугольник ACP, равен 12 см, тангенс угла ABC равен 2,4. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Ответ:

Серия пособий «Трудные задания ОГЭ»

В 2019 году основана серия пособий **«Трудные задания ОГЭ».** Готовится к выпуску книга по математике **Крайневой Л.Б.«Задания повышенного и высокого уровней сложности. Приёмы и способы решений».**

Пособие предназначено для подготовки учащихся к Основному государственному экзамену по математике за курс основной школы. В книге содержатся образцы оформления решений основных типов заданий второй части экзаменационных вариантов, предложены задания для самопроверки и 10 вариантов диагностических работ, составленных только из заданий второй части экзаменационных вариантов.

Сборник также может использоваться учителем для организации внутренней системы оценки качества образования (проведение тестирований при подготовке к экзамену и проведению итогового повторения).

Всероссийские проверочные работы

- Всероссийские проверочные работы (ВПР) – новый вид контроля уровня учебных достижений учащихся, впервые введенный в 2015 году.
- Нужно помнить о том, что Всероссийские проверочные работы не являются итоговой аттестацией обучающихся, а представляют собой аналог годовых контрольных работ, традиционно проводившихся ранее в школах.
- Всероссийские проверочные работы лишь часть комплексной итоговой оценки.

Статистика ВПР-2018

Согласно данным статистики в 2018 году 97% учебных заведений РФ участвовали в ВПР, а уже в 2018-2019 учебном году Министерство обещает, что контрольные срезы пройдут абсолютно во всех школах страны.

Участниками Всероссийских проверочных работ, которые прошли весной 2018 года (они проводились для учащихся 4, 5, 6, 10 и 11 классов), стали более 4,7 миллиона школьников из 40,5 тысяч школ всех регионов России; всего в течение марта-мая ими было написано более 16 миллионов проверочных работ по различным предметам, сообщил заместитель руководителя Рособрнадзора Анзор Музаев в ходе Межрегиональной конференции по оценке качества образования.

Новое в ВПР на 2019 год:

- Основной новостью этого года является расширение классов, учащиеся которых обязаны будут принять участие в написании проверочных работ.
- Так, в 2019 году ВПР будут писать также 7 классы, для которых составлен свой график с учетом вынесенных на контроль предметов.
- В 2018-2019 учебном год готовиться к ним стоит учителям и родителям ребят, которые учатся в 4, 5, 6, 7, 10 и 11 классов. ВПР по математике планируется проводить во всех этих классах, кроме 10.
- Поскольку ученикам 7-х классов в этом году впервые предстоит участие в ВПР, для них проверочные работы будут проведены в режиме апробации.

Расписание ВПР на 2019 год

Предмет (ВПР)	4 класс	5 класс	6 класс	7 класс	11 класс
Русский язык	15-19 апреля (любые дни недели)	25 апреля	23 апреля	9 апреля	-
Математика	22-26 апреля (в любой день недели)	23 апреля	25 апреля	18 апреля	-
Окружающий мир		-	-	-	-
История	-	16 апреля	11 апреля	25 апреля	13 марта
Биология	-	18 апреля	16 апреля	11 апреля	21 марта
География	-	-	9 апреля	16 апреля	12 марта
Ин.яз	-	-	-	2 апреля	5 марта
Химия	-	-	-	-	14 марта
Физика	-	-	-	23 апреля	19 марта
Обществознание	-	-	18 апреля	4 апреля	-

Пособия по подготовке к ВПР

Данные пособия содержат по 15 вариантов тестовых заданий по всем темам курса математики 5 и 6 классов для экспресс-диагностики уровня освоения школьниками программы каждого класса.

Тренировочные работы составлены в соответствии с демоверсиями ВПР и работами прошлых лет.

Работа с пособием поможет повторить основные правила курса, оперативно проверить знания учащихся и научить решению различных задач.

В **содержание** пособий входят разделы:

- Повторяем правила. (Содержит теорию и примеры с образцами решения).
- Инструкция по выполнению работы.
- Варианты работ.
- Ответы.

Пособия для подготовки к Всероссийским проверочным работам

ПОВТОРЯЕМ ПРАВИЛА

СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

Чтобы умножить число на произведение двух чисел, можно сначала умножить его на первый множитель, а потом полученное произведение умножить на второй множитель (сочетательное свойство умножения).

ПРИМЕР. Найдите значение выражения $25 \cdot (4 \cdot 16)$.
Решение. $25 \cdot (4 \cdot 16) = (25 \cdot 4) \cdot 16 = 100 \cdot 16 = 1600$.

Чтобы вычесть сумму из числа, можно вначале вычесть из этого числа первое слагаемое, а потом из полученной разности вычесть второе слагаемое.

ПРИМЕР. Найдите значение выражения $94 - (4 + 29)$.
Решение. $94 - (4 + 29) = (94 - 4) - 29 = 90 - 29 = 61$.

Чтобы из суммы вычесть число, можно вычесть его из одного слагаемого, а к полученной разности прибавить оставшееся слагаемое.

ПРИМЕР. Найдите значение выражения $(86 + 34) - 26$.
Решение. $(86 + 34) - 26 = (86 - 26) + 34 = 60 + 34 = 94$.

Чтобы умножить сумму на число, можно умножить на это число каждое слагаемое и сложить получившиеся произведения (распределительное свойство умножения относительно сложения).

ПРИМЕР. Найдите значение выражения $(54 + 15) \cdot 2$.
Решение. $(54 + 15) \cdot 2 = (54 \cdot 2) + (15 \cdot 2) = 108 + 30 = 138$.

Чтобы умножить разность на число, можно умножить уменьшаемое и вычитаемое на это число и из первого произведения вычесть второе (распределительное свойство умножения относительно вычитания).

ПРИМЕР. Найдите значение выражения $(33 - 25) \cdot 4$.
Решение. $(33 - 25) \cdot 4 = (33 \cdot 4) - (25 \cdot 4) = 132 - 100 = 32$.

ВЫПОЛНЕНИЕ ДЕЙСТВИЙ В ЧИСЛОВОМ ВЫРАЖЕНИИ

1) Если в выражении нет скобок и оно содержит действия только одной ступени (сложение и вычитание или умножение и деление), то их выполняют по порядку слева направо.

2) Если выражение содержит действия первой (сложение и вычитание) и второй (умножение и деление) ступени и в нём нет скобок, то сначала выполняют действия второй ступени, а потом — действия первой ступени.

3) Если в выражении есть скобки, то сначала выполняют действия в скобках (учитывая при этом правила 1 и 2).

ПРИМЕР. Найдите значение выражения 81,04 + 1,072.

Решение.

$$\begin{array}{r} +\,81{,}040 \\ 1{,}072 \\ \hline 82{,}112 \end{array}$$

ПРИМЕР. Найдите значение выражения 81,04 – 1,072.

Решение.

$$\begin{array}{r} -\,81{,}040 \\ 1{,}072 \\ \hline 79{,}968 \end{array}$$

Округление десятичных дробей

1) Если первая отброшенная или заменённая нулём цифра равна 5, 6, 7, 8, 9, то стоящую перед ней цифру увеличивают на 1.

2) Если первая отброшенная или заменённая нулём цифра равна 0, 1, 2, 3, 4, то стоящую перед ней цифру оставляют без изменения.

ПРИМЕР. Округлите до десятков число 254.
Решение. $\underset{\sim}{25}4 \approx 250$.

ПРИМЕР. Округлите до сотен число 6583.
Решение. $65\underset{\sim}{8}3 \approx 6600$.

ПРИМЕР. Округлите:
1) 251,73 до десятых;
2) 4,547 до сотых;
3) 78,926 до целых;
4) 79,8 до десятков;
5) 1,098 до сотых.

Решение.
1) $251{,}7\underset{\sim}{3} \approx 251{,}7$;
2) $4{,}54\underset{\sim}{7} \approx 4{,}55$;
3) $78{,}9\underset{\sim}{2}6 \approx 79$;
4) $7\underset{\sim}{9}{,}8 \approx 80$;
5) $1{,}0\underset{\sim}{9}8 \approx 1{,}10$.

Чтобы умножить десятичную дробь на натуральное число, надо:
1) умножить её на это число, не обращая внимания на запятую;
2) в полученном произведении отделить запятой столько цифр справа, сколько их отделено запятой в десятичной дроби.

ПРИМЕР. Найдите значение выражения 2,34 · 13.

Решение.

$$\begin{array}{r} \times\,2{,}34 \\ 13 \\ \hline 702 \\ +\,234 \\ \hline 30{,}42 \end{array}$$

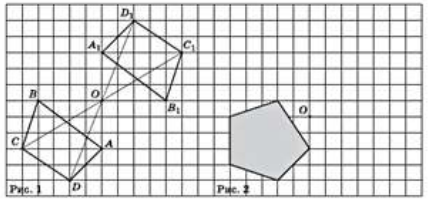
← (2 знака).

11 Периметр треугольника ABC равен 28 см. Сторона AB составляет 20 % периметра, а сторона BC — 35 % периметра. Найдите сторону AC треугольника. Ответ дайте в сантиметрах.

Решение:

Ответ:

12 На клетчатой бумаге (рис. 1) изображены фигуры, симметричные относительно точки O. Нарисуйте на рисунке 2 фигуру, симметричную закрашенной фигуре относительно данной точки.



13 К числу 43 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 45. В ответе запишите полученное число.

Решение:

Ответ:

ВАРИАНТ 3

1 Вычислите: $(1361 - 45) \cdot (-2)$.

Решение:

Ответ:

2 Вычислите: $\left(\frac{2}{5} + 6\frac{3}{4}\right) : 11$.

Решение:

Ответ:

3 Из задуманного числа вычли 3, полученную разность уменьшили в 2 раза и получили на 11 больше, чем треть задуманного числа. Какое число было задумано?

Решение:

Ответ:

4 Вычислите: $1{,}27 \cdot 31 - 18{,}07$.

Решение:

Ответ:

Метапредметные результаты. Стандартизированные материалы для промежуточной аттестации

Пособия для учителя

Пособия для учителя, в которых описываются основные подходы к оценке сформированности метапредметных умений, а также содержатся методические рекомендации для проведения работ по оценке метапредметных результатов учащихся.

Проверочные работы направлены на выявление у учащихся одного из основных метапредметных результатов обучения – сформированности умений читать и понимать различные тексты, включая и учебные; работать с информацией, представленной в различной форме; использовать полученную информацию для решения различных учебно-познавательных и учебно-практических задач.

В методических рекомендациях описываются цели проверочных работ, структура и содержание каждого варианта, особенности заданий, рекомендации по проведению работ, проверке и оценке результатов выполнения отдельных заданий и работ в целом. Сформулированы предложения по интерпретации и использованию результатов, полученных учеником и классом в целом.

ЕГИПЕТСКИЕ ДРОБИ

Прочитай текст и выполни задания 22—30

Египетские дроби были изобретены в Древнем Египте. Одним из первых известных упоминаний о египетских дробях является Математический папирус Ринда, который называют ещё папирусом Ахмеса — по имени египетского писца, переписавшего его около 1650 г. до н. э. Он включает таблицу египетских дробей, а также 84 математические задачи, ответы на которые записаны в виде египетских дробей.

Египетская дробь — это сумма нескольких дробей вида $\frac{1}{n}$. Дроби вида $\frac{1}{n}$ (где n — натуральное число) в современной математике называют *аликвотными*.

Пример египетской дроби: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{16}$. Она равна дроби $\frac{43}{48}$.

Чтобы представить дробное число в виде суммы аликвотных дробей, египетским математикам часто приходилось проявлять изобретательность. Например, число $\frac{2}{43}$ в папирусе выражено так:

$$\frac{2}{43}=\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}.$$

У египтян были специальные символы для записи дробей $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$, а для обозначения единичной дроби ставили над числом иероглиф (рот).

Примеры изображения дробей:

Изображение		
Дробь	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{11}$

Пример записи египетской дроби: .

«Переводится» она как $2+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}$ и равняется $2\frac{3}{14}$.

А вот задача из знаменитого папируса: «Разделить 7 хлебов между 8 людьми».

Решена задача у Ахмеса так: поскольку $\frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, каждому надо дать по половинке, четвертинке и восьмушке хлеба.

22. Что включает в себя Математический папирус Ринда? Обведи номера правильных ответов.

1) 84 математические задачи
2) таблицу египетских дробей
3) примеры изображения дробей
4) историю изобретения египетских дробей

23. Сколько примерно лет папирусу Ринда сейчас? Обведи номер ответа.

1) 1650 2) 2000 3) 3300 4) 3660

24. Какие из данных дробей **НЕ являются** аликвотными? Отметь их знаком ✓.

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{7}{8}$ ☐ $\frac{1}{45}$

☐ $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{19}{20}$ ☐ $\frac{1}{100}$

25. Ниже приведены несколько утверждений об аликвотных и египетских дробях. Верны ли эти утверждения? Обведи в таблице «Верно» или «Неверно» для каждого утверждения.

Утверждение	Верно ли утверждение?	
1) Аликвотной называют дробь, числитель которой равен 1, а знаменатель является натуральным числом.	Верно	Неверно
2) Аликвотная дробь — это доля единицы.	Верно	Неверно
3) Сумма любых дробей, меньших 1, является египетской дробью.	Верно	Неверно

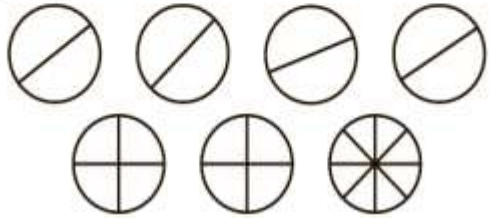
26. Запиши дроби $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{13}$, как это делали древние египтяне.

Ответ: _____

27. Какая дробь записана?

Ответ: _____

28. На рисунке показано, как были разделены 7 хлебов из задачи, описанной в папирусе Ахмеса. Покажи штриховкой доли, которые приходятся на одного человека.



29. Как можно разделить 3 яблока между 4 людьми? Можно каждое яблоко разрезать на 4 части и каждому дать по одной дольке от каждого яблока.

А как бы решили эту задачу древние египтяне? Покажи штриховкой доли, которые приходятся на одного человека. Запиши решение, используя египетские дроби.

Ответ: _____

30. Круг разделили пополам, затем одну из половинок опять разделили пополам, одну из вновь получившихся половинок снова разделили пополам и т. д. Используя рисунок, установи, на сколько египетская дробь $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ отличается от 1.

Ответ: _____