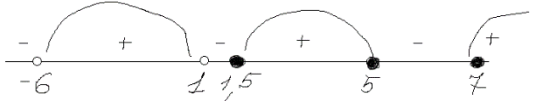



Задачи по математике для банка заданий

Автор/составитель Пахомова Анастасия Алексеевна

| № п/п | задания | решение |
|----------|--|---|
| 1 | <p>Решить систему уравнений:</p> $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{y}-2/\sqrt{x}} = 16, \\ \lg\sqrt{xy} - \lg 3 = 1; \end{cases}$ | $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{y}-2/\sqrt{x}} = 16, \\ \lg\sqrt{xy} - \lg 3 = 1; \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$ $\begin{cases} 2^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 2^4, \\ \lg\sqrt{xy} = \lg 10 + \lg 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ \lg\sqrt{xy} = \lg 30. \end{cases}$ <p>Пусть $\sqrt{x} = p > 0$, $\sqrt{y} = n > 0$, тогда $\begin{cases} 2p - n = 4, \\ pn = 30; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2p - 4, \\ p(2p - 4) = 30; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2p - 4, \\ 2p^2 - 4p - 30 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$</p> $\begin{cases} n = 2p - 4, \\ p^2 - 2p - 15 = 0; \end{cases} \Rightarrow p^2 - 2p - 15 = 0, D = 64.$ $p_1 = \frac{2-8}{2} = -3 \text{ - не подходит по ОДЗ, т.к. } -3 < 0. p_2 = \frac{2+8}{2} = 5.$ $\begin{cases} p = 5, \\ n = 6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 5, \\ \sqrt{y} = 6; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 25, \\ y = 36. \end{cases}$ <p>Проверка:</p> $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{36}-2/\sqrt{25}} = 16, \\ \lg\sqrt{900} - \lg 3 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = 16, \\ \lg 30 - \lg 3 = \lg 10; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16, \\ \lg 10 = \lg 10; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 = 16, \\ \lg 10 = \lg 10. \end{cases} \text{ Ответ: } x = 25, y = 36.$ |
| 2 | <p>Решить систему уравнений:</p> $\begin{cases} 4^x - 7 \cdot 2^{x-0,5y} = 2^{3-y}, \\ y - x = 3. \end{cases}$ | $\begin{cases} 4^x - 7 \cdot 2^{x-0,5y} = 2^{3-y}, \\ y - x = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x - 7 \cdot 2^{x-0,5y} = 2^{3-y}, \\ y = 3 + x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x - 7 \cdot 2^{x-0,5(3+x)} = 2^{3-(3+x)}, \\ y = 3 + x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x} - 7 \cdot 2^{0,5x-1,5} = 2^{-x}, \\ y = 3 + x. \end{cases} \Leftrightarrow$ |

| | | |
|---|---|--|
| | | $\begin{cases} \frac{2^{2x}}{2^{-x}} - 7 \cdot \frac{2^{0,5x-1,5}}{2^{-x}} = 1, & \Rightarrow 2^{2x+x} - 7 \cdot 2^{0,5x-1,5+x} = 1; \Rightarrow 2^{3x} - 7 \cdot 2^{1,5x-1,5} = 1; \Rightarrow 2^{3x} - 7 \cdot \frac{2^{1,5x}}{2^{1,5}} - 1 = 0; \Rightarrow 2^{1,5} \cdot \\ y = 3 + x. \end{cases}$ $2^{2 \cdot 1,5x} - 7 \cdot 2^{1,5x} - 2^{1,5} = 0.$ <p>Пусть $2^{1,5x} = t > 0$, тогда $2^{1,5}t^2 - 7t - 2^{1,5} = 0$.</p> $D = (-7)^2 - 4 \cdot 2^{1,5} \cdot (-2^{1,5}) = 49 + 2^{2+1,5+1,5} = 49 + 32 = 81.$ $t_1 = \frac{7-\sqrt{81}}{2 \cdot 2^{1,5}} = \frac{7-9}{2^{2,5}} = -2^{1-2,5} = -2^{-1,5} \text{ - решений нет; } t_2 = \frac{7+\sqrt{81}}{2 \cdot 2^{1,5}} = \frac{7+9}{2^{2,5}} = 2^{4-2,5} = 2^{1,5}; \Rightarrow 2^{1,5x} = 2^{1,5} \Rightarrow x = 1. \text{ Тогда}$ $y = 4.$ <p><i>Проверка:</i></p> $\begin{cases} 4^1 - 7 \cdot 2^{1-0,5 \cdot 4} = 2^{3-4}, & \Rightarrow \begin{cases} 4 - 7 \cdot 2^{1-2} = 2^{-1}, & \Rightarrow \begin{cases} 4 - 7 \cdot 2^{-1} = 2^{-1}, & \Rightarrow \begin{cases} 4 - 3,5 = 0,5, & \Rightarrow \begin{cases} 0,5 = 0,5, \\ 3 = 3. \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ 4 - 1 = 3. \end{cases} \end{cases} \text{ Ответ: } (1; 4)$ |
| 3 | <p>Решить систему уравнений:</p> $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2. \end{cases}$ | $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2. \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } x - y > 0.$ $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2 \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = \log_{\sqrt{3}} 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ x - y = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ x = 3 + y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3+y} \cdot 2^y = 972, \\ x = 3 + y. \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 3^y \cdot 2^y = 36, & \Leftrightarrow \begin{cases} 6^y = 6^2, \\ x = 3 + y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ x = 5. \end{cases}$ <p><i>Проверка:</i></p> $\begin{cases} 3^5 \cdot 2^2 = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(5 - 2) = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 243 \cdot 4 = 972, \\ \log_{\sqrt{3}} 3 = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 972 = 972, \\ 2 = 2. \end{cases} \text{ Ответ: } (5; 2).$ |
| 4 | <p>Решить систему уравнений:</p> $\begin{cases} \log_3(y - x) = 1, \\ (0,25)^{\frac{x+y}{x}} = \frac{1}{32}. \end{cases}$ | $\begin{cases} \log_3(y - x) = 1, \\ (0,25)^{\frac{x+y}{x}} = \frac{1}{32}. \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} y - x > 0, \\ x \neq 0, \\ y \neq 0. \end{cases}$ $\begin{cases} 2^{-2(\frac{x+y}{x})} = 2^{-5}, \\ \log_3(y - x) = \log_3 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(\frac{x+y}{x}) = 5, \\ y - x = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x} - 5 = 0, \\ x = y - 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 5xy = 0, \\ x = y - 3. \end{cases} \Leftrightarrow$ $2(y - 3)^2 + 2y^2 - 5y(y - 3) = 0, \Rightarrow 2(y^2 - 6y + 9) + 2y^2 - 5y^2 + 15y = 0 \Rightarrow -y^2 + 3y + 18 = 0, \Rightarrow y^2 - 3y - 18 = 0$ $0, \Rightarrow (y - 6)(y + 3) = 0, \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = -3 \notin \text{ОДЗ} \\ y_2 = 6 \end{matrix}, \Rightarrow \begin{cases} y = 6, \\ x = 3. \end{cases}$ <p><i>Проверка:</i></p> $\begin{cases} (0,25)^{\frac{6+3}{6}} = \frac{1}{32}, \\ \log_3(5\frac{1}{4} - 2\frac{1}{4}) = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\frac{1}{4})^{2+\frac{1}{2}} = \frac{1}{32}, \\ \log_3 3 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\frac{1}{4})^{2,5} = \frac{1}{32}, \\ 1 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}, \\ 1 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{32} = \frac{1}{32}, \\ 1 = 1. \end{cases} \text{ Ответ: } (3; 6).$ |
| 5 | <p>Решить уравнение</p> $8x^4 - x^3 + 64x - 8 = 0.$ | $8x^4 - x^3 + 64x - 8 = 0.$ $x^3(8x - 1) + 8(8x - 1) = 0,$ $(x^3 + 8)(8x - 1) = 0, \quad x_1^3 = -8, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = \frac{1}{8}$ |

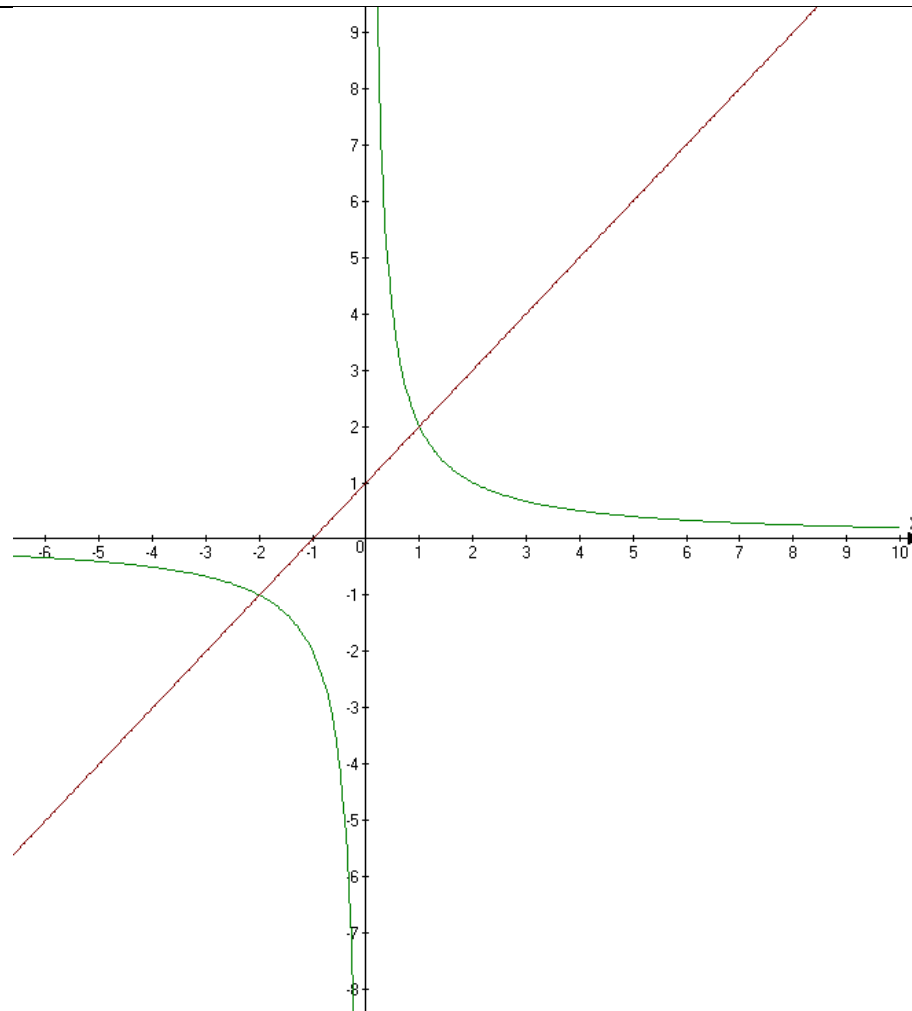
| | | |
|----|--|--|
| 6 | <p>Решить уравнение</p> $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55.$ | $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55.$ $(x^2 + 2x)^2 - (x^2 + 2x + 1)^2 = 55, x^2 + 2x = y,$ $y^2 + y - 1 = 55, y^2 + y - 56 = 0,$ $y = -7, y = 8.$ $x^2 + 2x = -7, x^2 + 2x + 7 = 0; D < 0.$ $x^2 + 2x = 8, x^2 + 2x - 8 = 0,$ $(x + 2)(x - 4) = 0; x_1 = -4, x_2 = 2.$ |
| 7 | <p>Решить уравнение</p> $\frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = -2,5.$ | $\frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = -2,5.$ <p>ОДЗ: $x \neq 0$;</p> $\frac{x^2+1}{x} = y, y + \frac{1}{y} = -2,5 \mid \cdot 2y.$ $2y^2 + 5y + 2 = 0, D = 9, y_1 = -2, y_2 = -\frac{1}{2}.$ $\frac{x^2+1}{x} = -2, x^2 + 2x + 1 = 0, x_{1,2} = -1.$ $\frac{x^2+1}{x} = -\frac{1}{2}, 2x^2 + x + 2 = 0, D < 0.$ |
| 8 | <p>Решить уравнение</p> $27x^4 - x^3 + 729x - 27 = 0$ | $27x^4 - x^3 + 729x - 27 = 0.$ $x^3(27x - 1) + 27(27x - 1) = 0,$ $(x^3 + 27)(27x - 1) = 0,$ $x_1^3 = -27, x_1 = -3, x_2 = \frac{1}{27}.$ |
| 9 | <p>Решить уравнение</p> $64x^4 - x^3 + 4096x - 64 = 0$ | $64x^4 - x^3 + 4096x - 64 = 0.$ $x^3(64x - 1) + 64(64x - 1) = 0,$ $(x^3 + 64)(64x - 1) = 0,$ $x_1^3 = -64, x_1 = -4, x_2 = \frac{1}{64}.$ |
| 10 | <p>Решите неравенство методом интервалов</p> $\frac{(x-5)(x-7)(2x-3)}{-(x+6)(x-1)} \leq 0$ | $\frac{(x-5)(x-7)(2x-3)}{-(x+6)(x-1)} \leq 0,$ $\frac{(x-5)(x-7)(2x-3)}{(x+6)(x-1)} \geq 0.$ <p>Ответ: $(-6; 1) \cup [1,5; 5] \cup [7; +\infty)$</p>  |
| 11 | <p>Решите неравенство методом интервалов</p> $\frac{(x+3)(4-x)}{3x^2+10x+3} < 0$ | $\frac{(x+3)(4-x)}{3x^2+10x+3} < 0,$ <p>Разложим знаменатель на множители. Для этого решим квадратное уравнение: $3x^2 + 10x + 3 = 0$.</p> $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{6} = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{-10 \pm 8}{6} = \begin{cases} -3, \\ -\frac{1}{3}. \end{cases}$ <p>Имеем $3x^2 + 10x + 3 = 3(x + 3)(x + \frac{1}{3}) = 0$.</p> $\frac{-(x+3)(x-4)}{3(x+3)(x+\frac{1}{3})} < 0, \frac{(x+3)(x-4)}{(x+3)(x+\frac{1}{3})} > 0$ <p>Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; -\frac{1}{3}) \cup (4; +\infty)$</p>  |
| 12 | <p>Упростить</p> $-\log_2 \log_2 \sqrt[4]{\sqrt{2}}$ | $-\log_2 \log_2 \sqrt[4]{\sqrt{2}} = -\log_2 \log_2 \sqrt[8]{2} = -\log_2 \log_2 2^{\frac{1}{8}} = -\log_2 \left(\frac{1}{8} \log_2 2 \right) = -\log_2 2^{-3} = -(-3) = 3.$ |

| | | |
|----|--|--|
| 13 | <p>Упростить</p> $\frac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49}\right) \left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}\right)}{3 + 5^{\frac{1}{\log_{16} 25}} \cdot 5^{\log_5 3}}$ | $\frac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3} + 5^{\log_{25} 49}}\right) \left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}\right)}{3 + 5^{\frac{1}{\log_{16} 25} \cdot \log_5 3}} = \frac{(27^{\log_3 2 + 5^{\log_5 2 \cdot 49}})(81^{\log_9 4} - 8^{\log_2 2^9})}{3 + 5^{\log_5 2^{16} \cdot 5^{\log_5 3}}} = \frac{(3^{3 \log_3 2 + 5^{\frac{1}{2} \log_5 49}})(9^{2 \log_9 4} - 2^{\frac{3}{2} \log_2 9})}{3 + 5^{\frac{1}{2} \log_5 16 \cdot 3}} =$ $= \frac{(3^{\log_3 2^3 + 5^{\log_5 49 \cdot 2}})(9^{\log_9 4^2} - 2^{\log_2 9^{\frac{3}{2}}})}{3 + 5^{\log_5 16^2 \cdot 3}} = \frac{(3^{\log_3 8 + 5^{\log_5 7}})(9^{\log_9 16} - 2^{\log_2 27})}{3 + 5^{\log_5 4 \cdot 3}} = \frac{(8+7)(16-27)}{3+4 \cdot 3} = -11.$ |
| 14 | <p>Упростить</p> $\frac{81^{\frac{1}{\log_5 9}} + 3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}} 3}}}{409} \cdot \left((\sqrt{7})^{\frac{2}{\log_{25} 7}} - 125^{\log_{25} 6} \right)$ | $\frac{\left(81^{\frac{1}{\log_5 9} + 3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}} 3}}}\right)}{409} \cdot \left((\sqrt{7})^{\frac{2}{\log_{25} 7}} - 125^{\log_{25} 6} \right) = \frac{(81^{\log_9 5 + (3^{\log_3 \sqrt{6}})^3})}{409} \cdot \left(\left(\frac{1}{7^2}\right)^{2 \log_7 25} - 5^{3 \log_5 2 \cdot 6} \right) = \frac{(25 + (\sqrt{6})^3)}{409} \cdot (7^{\log_7 25} -$ $5^{\log_5 6^{1,5}}) = \frac{(25 + (\sqrt{6})^3)}{409} \cdot (25 - 6^{1,5}) = \frac{25^2 - (6^{1,5})^2}{409} = \frac{625 - 6^3}{409} = \frac{625 - 216}{409} = 1.$ |
| 15 | <p>Вычислить сумму $2^x + 2^{-x}$, если $4^x + 4^{-x} = 23$.</p> | $4^x + 4^{-x} = 23, \quad (2^x)^2 + (2^{-x})^2 = 23, \quad (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} + (2^{-x})^2 = 23 + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x}, \quad (2^x + 2^{-x})^2 = 23 + 2,$ $(2^x + 2^{-x})^2 = 25, \quad 2^x + 2^{-x} = 5.$ |

16

Решите графически уравнение:

$$\frac{2}{x} = x + 1$$

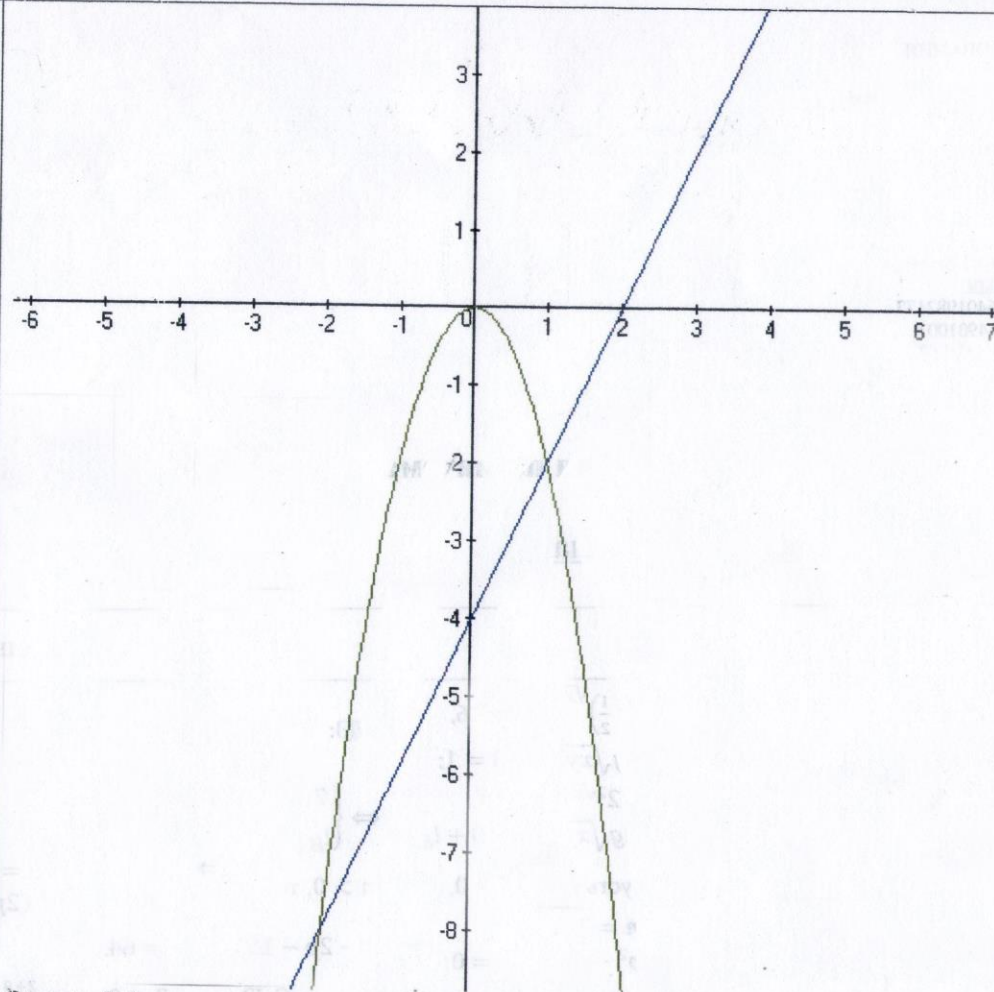


Ответ: -2; 1.

Решите графически уравнение:

$$-2x^2 = 2x - 4$$

17



Ответ: -2; 1.

Пахомова А.А.
Автор/составитель