

## ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ АРГУМЕНТОВ

| Формулы сложения аргументов   | Примеры   |
|---|---|
| 1. $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$  | 1. $\sin(4a+2a) = \sin 4a \cos 2a + \cos 4a \sin 2a$  |
| 2. $\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$  | 2. $\cos(3a-a) = \cos 3a \cos a + \sin 3a \sin a$   |
| 3. $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$  | 3. $\sin(5a-2a) = \sin 5a \cos 2a - \sin 2a \cos 5a$  |
| 4. $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$  | 4. $\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{9} + \operatorname{tg} \frac{5\pi}{36}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{9} \cdot \operatorname{tg} \frac{5\pi}{36}} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{9} + \frac{5\pi}{36} \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ |
| 5. $\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{1 - \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}$ |   |
| 6. $\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tga} - \operatorname{tgb}}{1 + \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}$ |   |

| Формулы сложения  | Примеры  |
|---|--|
| $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$  | $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$   |
| $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$  | $\cos 50^\circ \sin 80^\circ - \sin 50^\circ \cos 80^\circ = \sin(80^\circ - 50^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$  |
| $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$ | $\operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg}(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -(1 + \sqrt{3})$                    |
| Формулы двойного угла   |  |
| $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$  | $\sin 10x = 2 \sin 5x \cdot \cos 5x$<br>$8 \cos 3x \cdot \sin 3x = 4 \cdot (2 \cdot \cos 3x \cdot \sin 3x) = 4 \sin 6x$  |
| $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - \sin^2 \alpha$  | $\cos 7x = \cos^2 \frac{7x}{2} - \sin^2 \frac{7x}{2}$<br>$\cos 16x = 2 \cos^2 8x - 1$<br>$\cos 12x = 1 - \sin^2 6x$  |
| $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$   | $\frac{2 \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg}^2 2x} = \operatorname{tg} 4x$   |
| Формулы понижения степени   |  |
| $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$   | $\sin^2 5x = \frac{1}{2}(1 - \cos 10x)$  |
| $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$   | $(1 + \cos 8x) = 2 \cdot \left[ \frac{1}{2}(1 + \cos 8x) \right] = 2 \cos^2 4x$  |
| Формулы суммы и разности синусов и косинусов  |  |
| $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$  | $\sin 75^\circ + \cos 75^\circ = \sin 75^\circ + \cos(90^\circ - 15^\circ) = \sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2 \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cdot \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ |
| $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$  |  |
| $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$  |  |

|   |  |
|---|--|
| $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ | $\cos \frac{11}{12} \pi - \cos \frac{5}{12} \pi = -2 \sin \frac{\frac{11}{12} \pi + \frac{5}{12} \pi}{2} \cdot \sin \frac{\frac{11}{12} \pi - \frac{5}{12} \pi}{2} =$<br>$= -2 \sin \frac{2}{3} \pi \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ |
| <b>Произведения тригонометрических функций</b>  |  |
| $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$        | $2 \sin 50^\circ \cdot \cos 40^\circ = \sin 90^\circ + \sin 10^\circ = 1 + \sin 10^\circ$  |
| $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$        | $3 \cos 20^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{3}{2} (\cos 100^\circ + \cos 60^\circ) =$   |
| $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$        | $= \frac{3}{2} \cos 100^\circ + \frac{3}{4}$   |

### Тригонометрические функции половинного аргумента.

**Пример:** Найти  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , если  $\cos \alpha = 0,75$ ,  $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

**Ответ:**  $\left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{1 - 0,75}{1 + 0,75}} = \sqrt{\frac{0,25}{1,75}} \approx \frac{0,5}{1,3} = \frac{5}{13}$

**Пример:** Упростите выражение  $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

**Ответ:** Используя формулу  $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ , получим  $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$ . Для преобразования

$\sin 2\alpha$  используем формулу двойного угла  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ . Тогда

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$$

## Упражнения для самостоятельного решения

| 1 вариант  | 2 вариант  |
|--|--|
| <b>Группа А : упростите выражение</b>  |  |
| 1. $\sin 407^\circ \cos 87^\circ - \cos 407^\circ \sin 87^\circ$ ;<br>2. $\cos 18^\circ \cos 12^\circ - \sin 18^\circ \sin 12^\circ$ ;<br>3. $\sin 40^\circ \cos 5^\circ + \cos 40^\circ \sin 5^\circ$ ;<br>4. $\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} 3a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 3a}$ ;<br>5. $\cos(45^\circ + a) - \cos(45^\circ - a)$ ;<br>6. $\sin \frac{3\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4}$ ;<br>7. $\sin(a + b) - \sin(a - b)$ .                 | 1. $\sin 37^\circ \cos 8^\circ + \cos 37^\circ \sin 8^\circ$ ;<br>2. $\cos 16^\circ \cos 14^\circ - \sin 16^\circ \sin 14^\circ$ ;<br>3. $\sin 20^\circ \cos 25^\circ + \cos 20^\circ \sin 25^\circ$ ;<br>4. $\frac{\operatorname{tg} 4a - \operatorname{tg} 5a}{1 + \operatorname{tg} 4a \operatorname{tg} 5a}$ ;<br>5. $\cos(30^\circ - a) + \cos(30^\circ + a)$ ;<br>6. $\sin \frac{3\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}$ ;<br>7. $\sin(a - b) + \sin(a + b)$ .                 |
| <b>Группа Б: упростите выражение</b>   |  |
| 1. $\frac{\cos a \cos b - \cos(a + b)}{\cos(a - b) - \sin a \sin b}$ ;<br>2. $\frac{\sin 11^\circ \cos 15^\circ + \sin 15^\circ \cos 11^\circ}{\sin 18^\circ \cos 12^\circ + \sin 12^\circ \cos 18^\circ}$ ;<br>3. $\frac{\sin(a + b) + \sin(a - b)}{\sin(a + b) - \sin(a - b)}$ ;<br>4. $\frac{\sin(45^\circ + a) - \cos(45^\circ + a)}{\sin(45^\circ + a) + \cos(45^\circ + a)}$ ;<br>5. $\frac{\operatorname{tg}(30^\circ + a) - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg}(30^\circ + a)}$ | 1. $\frac{\cos a \cos b + \cos(a + b)}{\cos(a - b) - \sin a \sin b}$ ;<br>2. $\frac{\cos 65^\circ \cos 40^\circ + \sin 65^\circ \sin 40^\circ}{\sin 37^\circ \cos 12^\circ + \sin 12^\circ \cos 37^\circ}$ ;<br>3. $\frac{\sin(a + b) - \sin(a - b)}{\sin(a - b) + \sin(a + b)}$ ;<br>4. $\frac{\sin(60^\circ + a) - \cos(30^\circ + a)}{\sin(60^\circ + a) + \cos(30^\circ + a)}$ ;<br>5. $\frac{\operatorname{tg}(45^\circ + a) - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg}(45^\circ + a)}$ |
| 6. $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - a\right) + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - a\right)}$ .   |  |

## ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ ОДНОИМЕННЫХ ФУНКЦИЙ

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2}$$

$$\sin 7a + \sin 5a = 2 \sin \frac{7a+5a}{2} \cos \frac{7a-5a}{2} = 2 \sin 6a \cos a$$

$$\sin 4a - \sin 3a = 2 \sin \frac{4a-3a}{2} \cos \frac{4a+3a}{2} = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{7a}{2}$$

$$\cos 5a + \cos 3a = 2 \cos \frac{5a+3a}{2} \cos \frac{5a-3a}{2} = 2 \cos 4a \cos a$$

$$\cos 8a - \cos 6a = -2 \sin \frac{8a-6a}{2} \sin \frac{8a+6a}{2} = -\sin a \sin 7a$$

**ГРУППА А**

Представьте в виде произведения.

| ВАРИАНТ 1  | ВАРИАНТ 2   |
|--|---|
| 1. $\sin 3a + \sin a$ ;                            | 1. $\sin 5a + \sin 9a$ ;                          |
| 2. $\sin b - \sin 5b$ ;                            | 2. $\sin 2b - \sin 4b$ ;                          |
| 3. $\cos 2x + \cos 3x$ ;                           | 3. $\cos 4x + \cos 6x$ ;                          |
| 4. $\cos y - \cos 3y$ ;                            | 4. $\cos 3y - \cos 5y$ ;                          |
| 5. $\cos 46^\circ - \cos 74^\circ$ ;               | 5. $\cos 36^\circ - \cos 64^\circ$ ;              |
| 6. $\sin 20^\circ - \sin 40^\circ$ ;               | 6. $\sin 46^\circ - \sin 44^\circ$ ;              |
| 7. $\sin \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{9}$ ;     | 7. $\sin \frac{3\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10}$ ; |
| 8. $\cos \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{3\pi}{4}$ ; | 8. $\cos \frac{5\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{4}$ ;  |
| 9. $\cos 50^\circ + \cos 80^\circ$ ;               | 9. $\cos 68^\circ + \cos 22^\circ$ ;              |
| 10. $\sin 15^\circ + \sin 65^\circ$ .              | 10. $\sin 10^\circ + \sin 5^\circ$ .              |

Максимальная оценка – 4

**ГРУППА Б**

Упростите выражение

| ВАРИАНТ 1  | ВАРИАНТ 2  |
|--|--|
| 1. $\frac{\sin 2a + \sin 6a}{\cos 2a + \cos 6a}$ ;                             | 1. $\frac{\sin 4a + \sin 8a}{\cos 4a + \cos 8a}$ ;                             |
| 2. $\frac{\cos 2a - \cos 4a}{\cos 2a + \cos 4a}$ ;                             | 2. $\frac{\cos 6a - \cos 4a}{\cos 6a + \cos 4a}$ ;                             |
| 3. $\frac{\sin a + \sin 5a}{\cos a + \cos 5a}$ ;                               | 3. $\frac{\sin 3a + \sin 7a}{\cos 3a + \cos 7a}$ ;                             |
| 4. $\frac{\cos 68^\circ - \cos 22^\circ}{\sin 68^\circ - \sin 22^\circ}$ ;     | 4. $\frac{\cos 34^\circ - \cos 11^\circ}{\sin 34^\circ - \sin 11^\circ}$ ;     |
| 5. $\frac{\sin 130^\circ + \sin 110^\circ}{\cos 130^\circ + \cos 110^\circ}$ ; | 5. $\frac{\sin 100^\circ + \sin 140^\circ}{\cos 100^\circ + \cos 140^\circ}$ ; |
| 6. $\cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$ ; | 6. $\cos\left(\frac{\pi}{3} + a\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - a\right)$ ; |
| 7. $\sin\left(\frac{\pi}{6} + a\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} - a\right)$ . | 7. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ . |